

**Zbigniew Dziopa**

Politechnika Świętokrzyska

Wydział Mechatroniki i Budowy Maszyn, Katedra Techniki Komputerowych i Uzbrojenia  
25-314 Kielce, al. Tysiąclecia Państwa Polskiego 7

e-mail: zdziopa@tu.kielce.pl

## **MODEL RUCHU WYRZUTNI OKRĘTOWEJ OPISANY PRZEZ TRANSFORMACJE UKŁADÓW WSPÓLRZĘDNYCH**

### **STRESZCZENIE**

W artykule przedstawiony jest model ruchu wyrzutni okrętowej niezbędny do sformułowania jej dynamiki. W celu opisanego ruchu podstawowego, zaburzeń ruchu podstawowego oraz ruchu sterowanego wyrzutni zastosowane są transformacje układów współrzędnych. Izometryczne transformacje sekwencyjne uzyskiwane są przez wprowadzenie kątów Bryanta.

#### Słowa kluczowe:

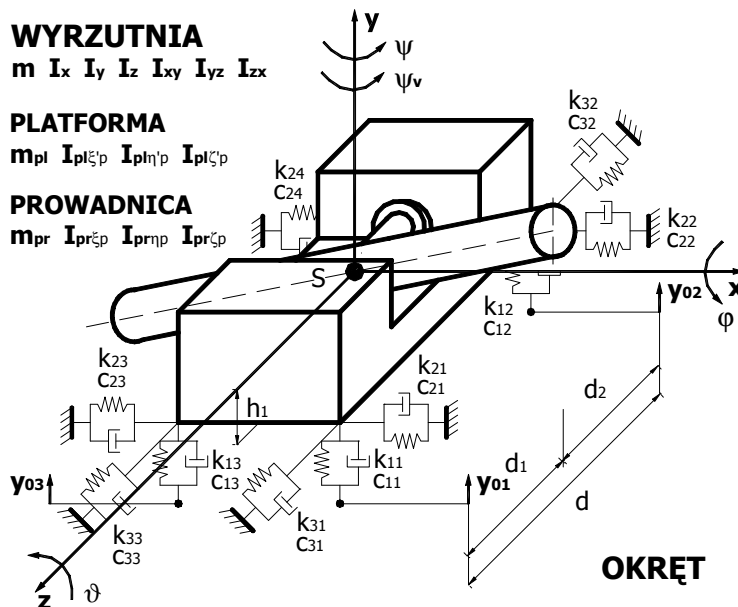
wyrzutnia okrętowa, dynamika ruchu, transformacja, model.

### **WSTĘP**

Na pokładzie okrętu zamontowana jest wyrzutnia składająca się z dwóch zasadniczych obiektów. Jeden z nich to platforma bezpośrednio umieszczona na pokładzie okrętu. Ruch podstawowy platformy jest ściśle związany z ruchem podstawowym okrętu. Platforma może obracać się względem pokładu okrętu zgodnie z kątem azymutu  $\psi_v$ , który jest kątem odchylenia platformy. Drugim obiektem jest prowadnica. Umieszczona na platformie tworzy z nią obrotową parę kinematyczną [2], w związku z czym prowadnica może obracać się względem platformy zgodnie z kątem elewacji  $\vartheta_v$  (kątem pochylenia prowadnicy). Te ruchy obrotowe wynikają z realizacji przez zestaw przeciwlotniczy procesu przechwytywania i śledzenia celu.

Na wyrzutni zainstalowana jest kamera termowizyjna, której obraz przekazywany jest na pulpit operatora. Operator siedząc w zabezpieczonej kajucie przed ekranem monitora, decyduje o ruchu realizowanym przez wyrzutnię. Po obróceniu platformy i prowadnicy do położenia, w którym następuje przechwycenie celu, wyrzutnia nie zmienia swojej konfiguracji lub przechodzi w tryb śledzenia. W sformułowanym modelu ruch podstawowy wyrzutni został zredukowany do podstawowego ruchu okrętu. Oznacza to, że ruch podstawowy wyrzutni jest ściśle związany z ruchem podstawowym okrętu. Wyrzutnia jest obiektem, którego charakterystyka bezwładności zależy od położenia celu względem zestawu przeciwlotniczego. Masa wyrzutni pozostaje stała, ale jej momenty bezwładności i momenty dewiacyjne zmieniają się. Od chwili przechwycenia celu charakterystyka bezwładności wyrzutni pozostaje niezmienna lub uwarunkowana jest procesem śledzenia.

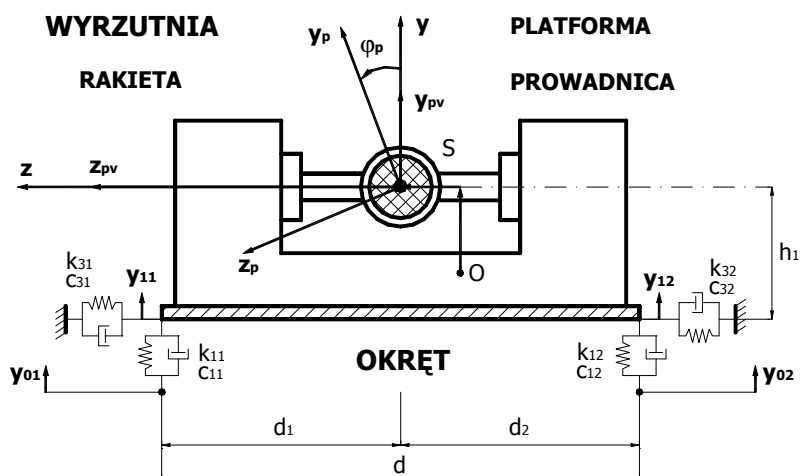
Wyrzutnię zamodelowano w postaci dwóch podstawowych mas i dwunastu elementów odkształcalnych [1], jak na rysunku 1.



Rys. 1. Model fizyczny wyrzutni

Źródło: opracowanie własne.

Wyrzutnia stanowi złożenie dwóch ciał doskonale sztywnych, tzn. platformy i prowadnicy. Układ ten charakteryzują następujące parametry bezwładności: masa  $m$ , momenty bezwładności  $I_x$ ,  $I_y$  i  $I_z$  oraz momenty dewiacyjne  $I_{xy}$ ,  $I_{yz}$  i  $I_{zx}$ . Charakterystyka bezwładności wyrzutni zależy od aktualnego położenia jej obiektów składowych, czyli platformy i prowadnicy. Platforma jest ciałem doskonale sztywnym o masie  $m_{pl}$  i głównych centralnych momentach bezwładności  $I_{pl\xi'_p}$ ,  $I_{pl\eta'_p}$ ,  $I_{pl\zeta'_p}$ . Posadowiona jest na pokładzie okrętu za pomocą dwunastu pasywnych elementów sprężysto-tłumiących o parametrach liniowych odpowiednio:  $k_{11}$  i  $c_{11}$ ,  $k_{12}$  i  $c_{12}$ ,  $k_{13}$  i  $c_{13}$ ,  $k_{14}$  i  $c_{14}$ ;  $k_{21}$  i  $c_{21}$ ,  $k_{22}$  i  $c_{22}$ ,  $k_{23}$  i  $c_{23}$ ,  $k_{24}$  i  $c_{24}$  oraz  $k_{31}$  i  $c_{31}$ ,  $k_{32}$  i  $c_{32}$ ,  $k_{33}$  i  $c_{33}$ ,  $k_{34}$  i  $c_{34}$ . Prowadnica jest również ciałem doskonale sztywnym o masie  $m_{pr}$  i głównych centralnych momentach bezwładności  $I_{pr\xi_p}$ ,  $I_{pr\eta_p}$ ,  $I_{pr\zeta_p}$ . Na rysunkach 1. i 2. przedstawiona jest między innymi charakterystyka geometryczna wyrzutni w zakresie niezbędnym do przeprowadzenia analizy ruchu zestawu [3]. Na rysunku 2. pokazany jest rzut boczny lewy modelu wyrzutni.



Rys. 2. Rzut boczny lewy modelu wyrzutni

Źródło: opracowanie własne.

## RUCH PODSTAWOWY WYRZUTNI

Ruch podstawowy wyrzutni jest wynikiem ruchu podstawowego okrętu.

### 1. Układ współrzędnych związany z ziemią

W przypadku rozpatrywanego zestawu przeciwnocznego można przyjąć, że układ związany z ziemią jest układem Galileusza.

$0_z x_z y_z z_z$  — to inercyjny, nieruchomy układ współrzędnych związany z powierzchnią wody. Osie  $0_z x_z$  i  $0_z z_z$  leżą w płaszczyźnie powierzchni wody, a oś  $0_z y_z$  jest skierowana do góry.

### 2. Układ współrzędnych związany z okrętem w miejscu posadowienia wyrzutni

$0xyz$  — to układ współrzędnych poruszający się ruchem podstawowym względem układu współrzędnych związanego z ziemią  $0_z x_z y_z z_z$ . Spełniony pozostaje zawsze warunek równoległości odpowiadających sobie osi  $0x \parallel 0_z x_z$ ,  $0y \parallel 0_z y_z$  i  $0z \parallel 0_z z_z$ . W przyjętym modelu założono, że ruch podstawowy okrętu jest prostoliniowym ruchem jednostajnym odbywającym się wzdłuż osi  $0_z x_z$ , zatem układy współrzędnych  $0xyz$  są również układami Galileusza. Jeżeli wyrzutnia porusza się bez zaburzeń ruchu podstawowego, to w każdym momencie punkt  $O$  pokrywa się ze środkiem masy wyrzutni  $S$ .

Położenie układu współrzędnych  $0xyz$  względem układu współrzędnych  $0_z x_z y_z z_z$  określone jest przez wektor  $\vec{R}$ , jak na rysunku 3.

$$\vec{R}(R_{x_z}, R_{y_z}, R_{z_z}) \quad (1)$$

$$R_{x_z} = R_{x_z}^0 + Vt$$

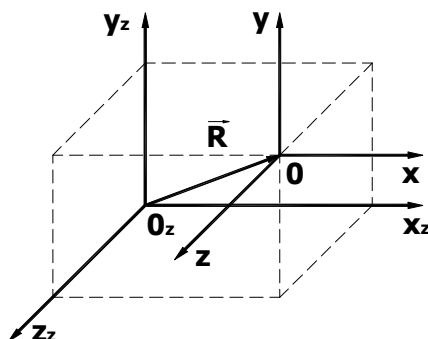
$$R_{y_z} = R_{y_z}^0 \quad ,$$

$$R_{z_z} = R_{z_z}^0$$

gdzie:

$$R_{x_z}^0 = const \quad R_{y_z}^0 = const \quad R_{z_z}^0 = const ;$$

$V$  — prędkość okrętu.



Rys. 3. Transformacja układu współrzędnych  $Oxyz$  względem układu współrzędnych

$$O_z x_z y_z z_z$$

Źródło: opracowanie własne.

### ZABURZENIA RUCHU PODSTAWOWEGO WYRZUTNI

Liczba stopni swobody wynikająca ze sformułowanej struktury modelu wyrzutni opisującego zaburzenia ruchu podstawowego w przestrzeni wynosi sześć.

Do wyznaczenia położenia wyrzutni o masie  $m$ , momentach bezwładności  $I_x$ ,  $I_y$  i  $I_z$  oraz momentach dewiacyjnych  $I_{xy}$ ,  $I_{yz}$  i  $I_{zx}$  w dowolnej chwili przyjęto sześć niezależnych współrzędnych uogólnionych [4]:

- 1)  $x$  — poziome przemieszczenie środka masy  $S$  wyrzutni zgodnie z kierunkiem osi  $Ox$ ;
- 2)  $y$  — pionowe przemieszczenie środka masy  $S$  wyrzutni zgodnie z kierunkiem osi  $Oy$ ;
- 3)  $z$  — poziome przemieszczenie środka masy  $S$  wyrzutni zgodnie z kierunkiem osi  $Oz$ ;
- 4)  $\psi$  — kąt obrotu wyrzutni dookoła osi  $Sy$ ;
- 5)  $\vartheta$  — kąt obrotu wyrzutni dookoła osi  $Sz$ ;
- 6)  $\varphi$  — kąt obrotu wyrzutni dookoła osi  $Sx$ .

Położenia wyrzutni o masie  $m$ , momentach bezwładności  $I_x$ ,  $I_y$  i  $I_z$  oraz momentach dewiacyjnych  $I_{xy}$ ,  $I_{yz}$  i  $I_{zx}$  w dowolnej chwili wyznaczone są w kartezjańskich ortogonalnych prawoskrętnych układach współrzędnych. Układami odniesienia opisującymi zaburzenia ruchu podstawowego w przestrzeni są następujące układy współrzędnych (określające ruch drgający wyrzutni):

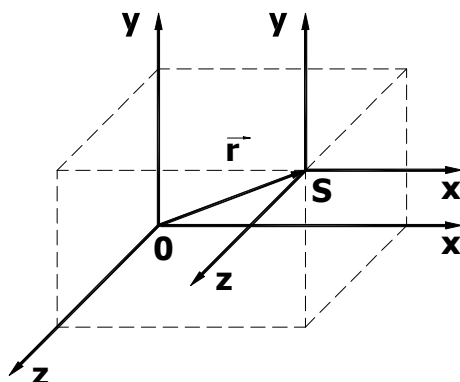
$Sxyz$  — to układ współrzędnych poruszający się w ogólnym przypadku ruchem postępowym względem układu współrzędnych  $Oxyz$ . Początek układu współrzędnych  $S$  w każdym momencie pokrywa się ze środkiem masy wyrzutni. Spełniony pozostaje zawsze warunek równoległości odpowiadających sobie osi  $Sx \parallel Ox$ ,  $Sy \parallel Oy$  i  $Sz \parallel Oz$ . Pod wpływem zaburzeń ruchu podstawowego środek masy wyrzutni  $S$  przemieszcza się, realizując translację względem osi  $Ox$ ,  $Oy$  i  $Oz$ .

$S\xi\eta\zeta$  — to układ współrzędnych poruszający się w ogólnym przypadku ruchem kulistym względem układu współrzędnych  $Sxyz$ . Osie  $S\xi$ ,  $S\eta$  i  $S\zeta$  związane są sztywno z bryłą platformy w ten sposób, że są jej głównymi centralnymi osiami bezwładności. Pod wpływem zaburzeń ruchu podstawowego wyrzutnia obraca się dookoła osi  $Sy$  zgodnie ze zmianą kąta odchylenia  $\psi$ , dookoła osi  $Sz$  zgodnie ze zmianą kąta pochylenia  $\vartheta$  oraz dookoła osi  $Sx$  zgodnie ze zmianą kąta przechylenia  $\varphi$ .

Jeżeli wyrzutnia porusza się bez zaburzeń ruchu podstawowego, to układy współrzędnych  $Oxyz$ ,  $Sxyz$  i  $S\xi\eta\zeta$  w każdym momencie pokrywają się ze sobą. Model wyrzutni jako przestrzenny układ drgający wykonuje względem układu odniesienia  $Oxyz$  ruch złożony składający się z ruchu translacyjnego środka masy  $S$  zgodnie ze zmianą współrzędnych  $x$ ,  $y$  i  $z$  ruchu kulistego reprezentowanego przez obrót dookoła osi  $Sy$  zgodnie ze zmianą kąta odchylenia  $\psi$ , obrót dookoła osi  $Sz$  zgodnie ze zmianą kąta pochylenia  $\vartheta$  i ruchu obrotowego dookoła osi  $Sx$  zgodnie ze zmianą kąta przechylenia  $\varphi$ .

Położenie układu współrzędnych  $Sxyz$  względem układu współrzędnych  $Oxyz$  określone jest przez wektor  $\vec{r}$ :

$$\vec{r}(r_x, r_y, r_z). \quad (2)$$

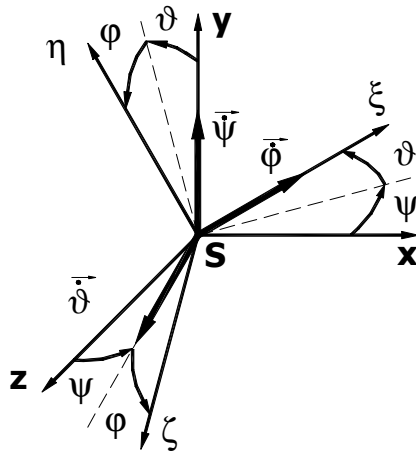


Rys. 4. Transformacja układu współrzędnych  $Sxyz$  względem układu współrzędnych  $Oxyz$

Źródło: opracowanie własne.

Położenie układu współrzędnych  $S\xi\eta\zeta$  względem układu współrzędnych  $Sxyz$  określone jest przez kąty Bryanta  $\psi$ ,  $\vartheta$ ,  $\varphi$ , jak na rysunku 5. Zastosowanie tych kątów prowadzi do izometrycznej transformacji sekwencyjnej  $R_{\psi\vartheta\varphi}$ , która jest złożeniem trzech kolejnych obrotów  $\psi$ ,  $\vartheta$ ,  $\varphi$ . Transformacja  $R_{\psi\vartheta\varphi}$  jako macierz przekształcenia ma postać następującą:

$$R_{\psi\vartheta\varphi} = \begin{bmatrix} \cos\psi \cos\vartheta & \sin\vartheta & -\sin\psi \cos\vartheta \\ \sin\psi \sin\varphi + & \cos\vartheta \cos\varphi & \cos\psi \sin\varphi + \\ -\cos\psi \sin\vartheta \cos\varphi & & +\sin\psi \sin\vartheta \cos\varphi \\ \sin\psi \cos\varphi + & -\cos\vartheta \sin\varphi & \cos\psi \cos\varphi + \\ +\cos\psi \sin\vartheta \sin\varphi & & -\sin\psi \sin\vartheta \sin\varphi \end{bmatrix}. \quad (3)$$



Rys. 5. Transformacja układu współrzędnych  $S\xi\eta\zeta$  względem układu współrzędnych  $Sxyz$ .

Źródło: opracowanie własne.

## STEROWANY RUCH WYRZUTNI

Liczba stopni swobody wynikająca ze sformułowanej struktury modelu wyrzutni opisującego ruch podstawowy realizujący sterowanie w przestrzeni mające na celu przechwycenie obiektu przeznaczonego do zestrzelenia rakieta wynosi dwa.

Do wyznaczenia położenia wyrzutni o masie  $m$ , momentach bezwładności  $I_x$ ,  $I_y$  i  $I_z$  oraz momentach dewiacyjnych  $I_{xy}$ ,  $I_{yz}$  i  $I_{zx}$  w dowolnej chwili przyjęto jedną niezależną współrzędną uogólnioną

- $\psi_v$  — kąt obrotu wyrzutni dookoła osi  $Sy$ .

Do wyznaczenia położenia prowadnicy o masie  $m_{pr}$  i głównych centralnych momentach bezwładności  $I_{pr\xi_p}$ ,  $I_{pr\eta_p}$ ,  $I_{pr\zeta_p}$  w dowolnej chwili przyjęto jedną niezależną współrzędną uogólnioną

- $\vartheta_v$  — kąt obrotu prowadnicy dookoła osi  $Sz$ .

Układ elementów inercyjnych wyrzutni uzależniony jest od położenia jej obiektów składowych w chwili przechwycenia celu. Do określenia konfiguracji



wyrzutni w danej chwili niezbędne jest określenie położenia platformy i prowadnicy. Położenie bryły platformy o masie  $m_{pl}$  i głównych centralnych momentach bezwładności  $I_{pl\xi'_p}$ ,  $I_{pl\eta'_p}$ ,  $I_{pl\zeta'_p}$  oraz bryły prowadnicy o masie  $m_{pr}$  i głównych centralnych momentach bezwładności  $I_{pr\xi_p}$ ,  $I_{pr\eta_p}$ ,  $I_{pr\zeta_p}$  wyznaczone jest w kartezjańskich ortogonalnych prawoskrętnych układach współrzędnych. Układami odniesienia opisującymi ruch podstawowy realizujący sterowanie w przestrzeni są następujące układy współrzędnych:

1. Układ współrzędnych określający sterowany ruch podstawowy wyrzutni:

$S\xi_p\eta_p\zeta_p$  — to układ współrzędnych poruszający się w ogólnym przypadku ruchem kulistym względem układu współrzędnych  $S\xi\eta\zeta$ . Osie  $S\xi_p$ ,  $S\eta_p$  i  $S\zeta_p$  związane są sztywno z bryłą prowadnicy w ten sposób, że są jej głównymi centralnymi osiami bezwładności. Pod wpływem ruchu podstawowego realizującego sterowanie w przestrzeni mające na celu przechwycenie obiektu przeznaczonego do zestrzelenia rakietą platforma wyrzutni obraca się dookoła osi  $S\eta$  zgodnie ze zmianą kąta odchylenia  $\psi_v$ , jednocześnie prowadnica wyrzutni obraca się dookoła osi  $S\zeta$  zgodnie ze zmianą kąta pochylenia  $\vartheta_v$ .

Jeżeli wyrzutnia nie wykonuje ruchu podstawowego realizującego sterowanie w przestrzeni mające na celu przechwycenie obiektu przeznaczonego do zestrzelenia rakietą, to układy współrzędnych  $S\xi\eta\zeta$  i  $S\xi_p\eta_p\zeta_p$  w każdej chwili pokrywają się ze sobą. Model wyrzutni jako przestrzenny układ realizujący sterowany ruch podstawowy wykonuje względem układu odniesienia  $S\xi\eta\zeta$  dwa ruchy. Jeden ruch wykonuje platforma, a drugi prowadnica. Platforma realizuje ruch obrotowy dookoła osi  $S\eta$  zgodnie ze zmianą kąta odchylenia  $\psi_v$ . Wraz z platformą ruch ten wykonuje również prowadnica umieszczona na platformie. Jednocześnie prowadnica realizuje ruch obrotowy względem platformy. Obrót odbywa się dookoła osi  $S\zeta$  zgodnie ze zmianą kąta pochylenia  $\vartheta_v$ .

2. Układ współrzędnych określający sterowany ruch podstawowy platformy:

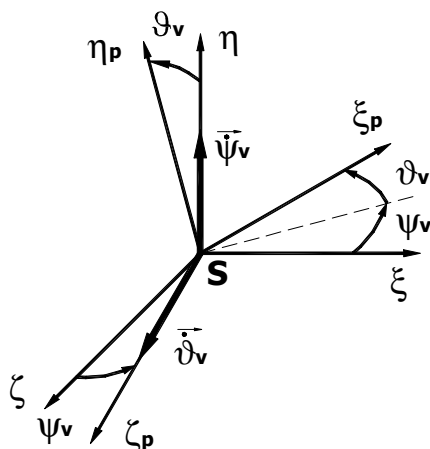
$S\xi'_p\eta'_p\zeta'_p$  — to układ współrzędnych obracający się o kąt  $\psi_v$  względem układu współrzędnych  $S\xi\eta\zeta$ . Osie  $S\xi'_p$ ,  $S\eta'_p$  i  $S\zeta'_p$  związane są sztywno z bryłą platformy w ten sposób, że są jej głównymi centralnymi osiami bezwładności. Ze względu na położenie celu operator obraca platformę względem pokładu okrętu o kąt odchylenia  $\psi_v$ .

3. Układ współrzędnych określający sterowany ruch podstawowy prowadnicy:

$S\xi''_p\eta''_p\zeta''_p$  — to układ współrzędnych obracający się o kąt  $\vartheta_v$  względem układu współrzędnych  $S_p\xi'_p\eta'_p\zeta'_p$ . Osie  $S\xi''_p$ ,  $S\eta''_p$  i  $S\zeta''_p$  związane są sztywno z bryłą prowadnicy w ten sposób, że są jej głównymi centralnymi osiami bezwładności. Ze względu na położenie celu operator obraca prowadnicę względem platformy o kąt pochylenia  $\vartheta_v$ .

Położenie układu współrzędnych  $S\xi_p\eta_p\zeta_p$  względem układu współrzędnych  $S\xi\eta\zeta$  określone jest przez kąty Bryanta  $\psi_v$ ,  $\vartheta_v$ , jak na rysunku 6. Zastosowanie tych kątów prowadzi do izometrycznej transformacji sekwencyjnej  $R_{\psi_v\vartheta_v}$ , która jest złożeniem dwóch kolejnych obrotów  $\psi_v$ ,  $\vartheta_v$ . Transformacja  $R_{\psi_v\vartheta_v}$  jako macierz przekształcenia ma postać następującą:

$$R_{\psi_v\vartheta_v} = \begin{bmatrix} \cos\psi_v \cos\vartheta_v & \sin\vartheta_v & -\sin\psi_v \cos\vartheta_v \\ -\cos\psi_v \sin\vartheta_v & \cos\vartheta_v & \sin\psi_v \sin\vartheta_v \\ \sin\psi_v & 0 & \cos\psi_v \end{bmatrix}. \quad (4)$$



Rys. 6. Transformacja układu współrzędnych  $S\xi_p\eta_p\zeta_p$  względem układu współrzędnych  $S\xi\eta\zeta$

Źródło: opracowanie własne.

## PODSUMOWANIE

W artykule zaprezentowana jest metoda interpretacji możliwych ruchów wyrzutni raketowej umieszczonej na pokładzie okrętu. Przedstawione zagadnienia nie wyczerpują tematu szczegółowego opracowania modelu ruchu wyrzutni, są jedynie próbą uogólnienia metody postępowania przy rozpatrywaniu możliwych przemieszczeń. Zdefiniowanie układów współrzędnych pozwala na ścisły opis analityczny procesów dynamicznych zachodzących podczas działania wyrzutni [5].

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Dziopa Z., Koruba Z., Krzysztofik I., *Elementy metody formułowania modelu wyrzutni raketowej umieszczonej na pokładzie okrętu*, [w:] *Kierowanie ogniem systemów obrony powietrznej (przeciwlotniczej)*, Akademia Marynarki Wojennej, Gdynia 2010, s. 85–94.
- [2] Dziopa Z., *Kinematyczny model startu rakiety z wyrzutni umieszczonej na pokładzie okrętu*, „Zeszyty Naukowe AMW”, 2011, nr 185A, s. 101–108.

- [3] Dziopa Z., Koruba Z., *Modelling and the Elements of Controlled Dynamics of the Anti-Aircraft Missile Launcher Based Onboard the Warship*, 'Solid State Phenomena', 2012, Vol. 180, Mechatronics System, Mechanics and Materials, pp. 269–280.
- [4] Osiecki J., Koruba Z., *Elementy mechaniki zaawansowanej*, Politechnika Świętokrzyska, Kielce 2007.
- [5] Светлицкий В. А., *Динамика старта летательных аппаратов*, Наука, Москва 1963.

## **SHIPBOARD LAUNCHER MOTION MODEL DESCRIBED WITH TRANSFORMATION OF COORDINATE SYSTEMS**

### **ABSTRACT**

The paper presents a shipboard launcher motion model necessary to formulate the dynamics of the launcher. Coordinate systems transformations are applied in order to describe the primary motion, primary motion disorders and the controlled motion of the launcher. Isometric sequence transformations are obtained by introducing Bryant angles.

Keywords:

shipboard launcher, dynamics movement, transformation, model.