**Stanisław Kołaczyński**
Akademia Marynarki Wojennej
Wydział Nawigacji i Uzbrojenia Okrętowego, Instytut Nawigacji i Hydrografii Morskiej
81-103 Gdynia, ul. J. Śmidowicza 69
e-mail: S.Kolaczynski@amw.gdynia.pl

# ZAWARTOŚĆ INFORMACYJNA WYNIKÓW KONTROLOWANYCH POMIARÓW GŁĘBOKOŚCI

## STRESZCZENIE

W artykule przedstawiono próbę oceny zawartości informacyjnej wyników wyrównania danych pomiarowych na przecinających się halsach, na których pozycje okrętu zostały wyznaczone z dużą dokładnością. Na bazie wybranej metody wyrównania oraz definicji ilości informacji oceniono zawartość informacyjną wyrównywanego wyniku.

Słowa kluczowe:

teoria informacji, opracowanie wyników pomiarów, zawartość informacyjna.

## WSTĘP

W procesie badań stacjonarnych pól fizycznych na morzu (w tym i pola głębokości) w celu dokonania kontroli pomiarów z reguły wykonuje się halsy poprzeczne, przecinające podstawowy układ halsów pomiarowych. Oprócz tego halsy układu pomiarowego mogą przecinać się między sobą, na przykład przy badaniu oddzielnego obiektu (takiego jak mielizna) na halsach układających się promieniście lub przez pokrycie rejonu przez układ składający się z dwóch albo więcej grup halsów równoległych.

W punktach przecięcia się halsów zazwyczaj występuje różnica pomiędzy wartościami głębokości zmierzonymi na każdym halsie oddzielnie. Różnica powstaje na skutek błędów aparatury pomiarowej, wpływu warunków hydrometeorologicznych i błędów wyznaczenia pozycji okrętu na halsie.

Jeśli nie ma podstaw przypuszczać, że powstałe różnice spowodowane zostały błędami systematycznymi, celowe jest zastosowanie wyrównania metodą najmniejszych kwadratów. W tej metodzie poszukuje się poprawek do mierzonych wartości parametru i współrzędnych punktów pomiarowych, zakładając pokrycie się wartości parametru w punktach przecięcia się halsów i minimalną wartość sumy kwadratów poszukiwanych poprawek z uwzględnieniem ich wag.

Współczesne systemy nawigacyjne pozwalają na wyznaczenie pozycji jednostki na halsie pomiarowym z dużą dokładnością, pozwalającą zaniechać uwzględniania ich wpływu na wynik pomiaru (błędu powstałego na skutek mylnego przyjęcia pozycji okrętu względem dna). Pozwala to na uproszczenie zadania wyrównawczego i ograniczenie się tylko do poszukiwania poprawek wartości głębokości zmierzonych w danych punktach.

## WYRÓWNANIE WYNIKÓW POMIARÓW GŁĘBOKOŚCI METODĄ KORELAT

### Założenia geometryczne

Dokonano pomiaru głębokości na dwóch przecinających się halsach. Na halsie pomiarowym w punkcie $P_1$ uzyskano wynik $h_1$ i w punkcie $P_2$ zmierzono $h_2$. Na halsie kontrolnym w punkcie $P_3$ zmierzono $h_3$ i w punkcie $P_4$ zmierzono $h_4$. Punkt przecięcia się halsów $P$ leży pomiędzy tymi punktami odpowiednio w odległości $S_1$ od punktu $P_1$, $S_2$ od punktu $P_2$, $S_3$ od $P_3$ i $S_4$ od $P_4$.

Należy określić wyrównaną wartość głębokości w punkcie przecięcia się halsów. Ponieważ poszukiwana jest wartość parametru (tj. głębokość) w jednym punkcie (przecięcia się halsów), a pomierzono cztery głębokości, to istnieje obserwacja nadliczbowa.

Zakładając regularny (liniowy) przebieg badanego pola w obrębie przedstawionego fragmentu, głębokość w punkcie przecięcia wyliczona na podstawie głębokości na halsie pomiarowym $h_p$ i głębokość wyinterpolowana na halsie kontrolnym $h_k$ wynoszą:

$$h_p = h_1 + \frac{S_1}{S_1 + S_2}\left(h_2 - h_1\right) \qquad h_k = h_3 + \frac{S_3}{S_3 + S_4}\left(h_4 - h_3\right). \tag{1}$$

Jeśli wartości te nie są identyczne lub nie różnią się o dopuszczalną przez instrukcję pomiarową wielkość (a tak jest w większości przypadków), to porównanie obydwu głębokości w punkcie przecięcia daje różnicę $\Delta h = h_k - h_p$, tj.:

$$\mathrm{f}\left(h_1, \cdots, h_4\right) = h_3 + \frac{S_3}{S_3 + S_4}\left(h_4 - h_3\right) - h_1 - \frac{S_1}{S_1 + S_2}\left(h_2 - h_1\right) - \Delta h = 0. \tag{2}$$

### Zadanie wyrównawcze

Zadanie wyrównawcze polega na dodaniu do każdego wyniku pomiaru głębokości $h_i$ takiej poprawki $v_i$, po której uwzględnieniu wyrównane głębokości w punkcie przecięcia się będą sobie równe, tj. $h_k - h_p = 0$.

$$\begin{aligned} \mathrm{f}\left(h_1, \cdots, h_4\right) = \left(h_3 + v_3\right) + \frac{S_3}{S_3 + S_4}\left[\left(h_4 + v_4\right) - \left(h_3 + v_3\right)\right] - \\ - \left(h_1 + v_1\right) - \frac{S_1}{S_1 + S_2}\left[\left(h_2 + v_2\right) - \left(h_1 + v_1\right)\right] = 0 \end{aligned} . \tag{3}$$

Pozwala to na otrzymanie równania poprawek, którego postać ogólna przedstawia się następująco:

$$\frac{\partial \mathrm{f}\left(h_1, \cdots, h_4\right)}{\partial h_3} v_3 + \frac{\partial \mathrm{f}\left(h_1, \cdots, h_4\right)}{\partial h_4} v_4 - \frac{\partial \mathrm{f}\left(h_1, \cdots, h_4\right)}{\partial h_1} v_1 - \frac{\partial \mathrm{f}\left(h_1, \cdots, h_4\right)}{\partial h_2} v_2 + \Delta h = 0, \tag{4}$$

a konkretnie dla naszego przykładu równanie warunkowe przyjmuje postać:

$$\left(1 - \frac{S_3}{S_3 + S_4}\right) v_3 + \frac{S_3}{S_3 + S_4} v_4 - \left(1 - \frac{S_1}{S_1 + S_2}\right) v_1 - \frac{S_1}{S_1 + S_2} v_2 + \Delta h = 0. \tag{5}$$

**Zastosowanie metody korelat**

W powyższym równaniu występują cztery nieznane poprawki, jest więc ono względem tych wielkości niedookreślone. Zgodnie z zasadą metody mniejszych kwadratów można to równanie uzupełnić następującym kryterium optymalizacyjnym:

$$\varphi(v_1,\cdots,v_4) = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 = \min \tag{6}$$

Z uwagi na równanie warunkowe (5), korzystając z mnożnika Lagrange'a, kryterium (6) zastępujemy problemem optymalizacyjnym w postaci:

$$\begin{aligned}\varphi_L &= v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 - \\ &- 2k\left[\left(1-\frac{S_3}{S_3+S_4}\right)v_3 + \frac{S_3}{S_3+S_4}v_4 - \left(1-\frac{S_1}{S_1+S_2}\right)v_1 - \frac{S_1}{S_1+S_2}v_2 + \Delta h\right] = \min,\end{aligned} \tag{7}$$

gdzie

$$\varphi_L(v_1,\cdots,v_4) = \varphi(v_1,\cdots,v_4) - 2k\,f(v_1,\cdots,v_4)$$

jest funkcją Lagrange'a

W celu wyznaczenia minimum funkcji $\varphi_L$ ułożymy równania pierwszych pochodnych i na tej podstawie obliczymy wartości poprawek głębokości. Warunek wystarczający na minimum funkcji $\varphi_L(v_1,\cdots,v_4)$ jest spełniony, gdy

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi_L}{\partial v_1} &= 2\hat{v}_1 - 2k\left(1-\frac{S_1}{S_1+S_2}\right) = 0\\ \frac{\partial\varphi_L}{\partial v_2} &= 2\hat{h}_2 - 2k\frac{S_1}{S_1+S_2} = 0\\ \frac{\partial\varphi_L}{\partial v_3} &= 2\hat{h}_3 - 2k\left(1-\frac{S_3}{S_3+S_4}\right) = 0\\ \frac{\partial\varphi_L}{\partial v_4} &= 2\hat{h}_4 - 2k\frac{S_3}{S_3+S_4} = 0\end{aligned}\quad, \tag{8}$$

gdzie $\hat{v}_i$ jest poprawką obliczoną (estymowaną).

Wobec tego

$$\begin{aligned} \hat{h}_1 &= k\left(1-\frac{S_1}{S_1+S_2}\right) \\ \hat{h}_2 &= k\frac{S_1}{S_1+S_2} \\ \hat{h}_3 &= k\left(1-\frac{S_3}{S_3+S_4}\right) \\ \hat{h}_4 &= k\frac{S_3}{S_3+S_4} \end{aligned} \quad . \tag{9}$$

Wstawiając poprawki (9) do równania warunkowego, uzyskujemy równanie korelaty

$$k\left(1-\frac{S_1}{S_1+S_2}\right)^2+k\left(\frac{S_1}{S_1+S_2}\right)^2+k\left(1-\frac{S_3}{S_3+S_4}\right)^2+k\left(\frac{S_3}{S_3+S_4}\right)^2+\Delta h=0\,, \tag{10}$$

skąd

$$k=\frac{-\Delta h}{\left(1-\frac{S_1}{S_1+S_2}\right)^2+\left(\frac{S_1}{S_1+S_2}\right)^2+\left(1-\frac{S_3}{S_3+S_4}\right)^2+\left(\frac{S_3}{S_3+S_4}\right)^2}\,. \tag{11}$$

Na podstawie wyrażeń zawartych w (9) oraz wartości korelaty (10) uzyskujemy poprawki o następujących wartościach:

$$\hat{v}_1 = \frac{\Delta h\left(1-\frac{S_1}{S_1+S_2}\right)}{\left(1-\frac{S_1}{S_1+S_2}\right)^2+\left(\frac{S_1}{S_1+S_2}\right)^2+\left(1-\frac{S_3}{S_3+S_4}\right)^2+\left(\frac{S_3}{S_3+S_4}\right)^2}; \tag{12}$$

$$\hat{v}_2 = \frac{\Delta h\frac{S_1}{S_1+S_2}}{\left(1-\frac{S_1}{S_1+S_2}\right)^2+\left(\frac{S_1}{S_1+S_2}\right)^2+\left(1-\frac{S_3}{S_3+S_4}\right)^2+\left(\frac{S_3}{S_3+S_4}\right)^2}; \tag{13}$$

$$\hat{v}_3 = \frac{-\Delta h\left(1-\frac{S_3}{S_3+S_4}\right)}{\left(1-\frac{S_1}{S_1+S_2}\right)^2+\left(\frac{S_1}{S_1+S_2}\right)^2+\left(1-\frac{S_3}{S_3+S_4}\right)^2+\left(\frac{S_3}{S_3+S_4}\right)^2}; \tag{14}$$

$$\hat{v}_4 = \frac{-\Delta h\frac{S_3}{S_3+S_4}}{\left(1-\frac{S_1}{S_1+S_2}\right)^2+\left(\frac{S_1}{S_1+S_2}\right)^2+\left(1-\frac{S_3}{S_3+S_4}\right)^2+\left(\frac{S_3}{S_3+S_4}\right)^2}. \tag{15}$$

Korzystając z tych poprawek, obliczamy wyrównane wartości głębokości

$$\hat{h}_i = h_i + \hat{v}_i \quad i = 1,\cdots,4. \tag{16}$$

Jeśli obliczenia zostały przeprowadzone prawidłowo, nowe wyrównane wartości głębokości w punkcie przecięcia się halsów są następujące:

$$\hat{h}_p = \hat{h}_1 + \frac{S_1}{S_1+S_2}\left(\hat{h}_2-\hat{h}_1\right), \quad \hat{h}_k = \hat{h}_3 + \frac{S_3}{S_3+S_4}\left(\hat{h}_4-\hat{h}_3\right) \tag{17}$$

i powinny być sobie równe $\hat{h}_p = \hat{h}_k$ .

## ZAWARTOŚĆ INFORMACYJNA WYNIKÓW POMIARU KONTROLNEGO

Dokonanie wyrównania wyników pomiarów ogranicza wpływ błędów na pomierzone głębokości. Zgodnie z definicją zawartość informacyjna niewyrównanego pomiaru określona jest przez związek [8]:

$$I = \log_2 \frac{1}{P} \quad [\text{bit}], \tag{18}$$

gdzie

$$P = \frac{\Delta}{\frac{1}{2}\left(h_p + h_k\right)} = 2\frac{h_p - h_k}{h_p + h_k}, \tag{19}$$

zatem

$$I = \log_2 \frac{h_p + h_k}{2\left(h_p - h_k\right)} \quad [\text{bit}]. \tag{20}$$

Poznanie ilości informacji zawartej w pomierzonych głębokościach może służyć do oceny jakości prowadzonych prac pomiarowych i ich planowania.

## OCENA WPŁYWU BŁĘDÓW POMIARÓW NA ICH ZAWARTOŚĆ INFORMACYJNĄ

Wpływ błędów pomiarów parametru na ich zawartość informacyjną można ocenić na podstawie różniczki równania (20):

$$\begin{aligned} I &= \log_2 \frac{h_p + h_k}{2\left(h_p - h_k\right)} = -1 + \frac{1}{\ln 2}\ln\left(h_p + h_k\right) - \frac{1}{\ln 2}\ln\left(h_p - h_k\right) \quad [\text{bit}] \\ \mathrm{d}I &= \frac{1}{\ln 2}\left(\frac{-2h_k}{\left(h_p - h_k\right)^2}\left(\mathrm{d}h_p + \mathrm{d}h_k\right)\right) \quad [\text{bit}] \end{aligned} \quad . \tag{21}$$

Wyznaczenie ilości informacji związanej z dokładnością pomierzonych głębokości może służyć do oceny jakości aparatury pomiarowej i technologii pomiarów.

## PODSUMOWANIE

Przedstawiony sposób określenia ilości informacji zawartej w wyrównanych wynikach pomiarów może stanowić podstawę do oceny ilościowej jakości prowadzonych prac pomiarowych oraz ich planowania. Przyjęcie danych z pomiarów jednostkowych umożliwi na przykład określanie wymagań w odniesieniu do instrumentów i technologii pomiarów.

## BIBLIOGRAFIA


[1] Abramson N., *Teoria informacji i kodowania*, PWN, Warszawa 1969.

[2] Jagłom A. M., Jagłom I. M., *Verojatnost' i informacija*, Izdaniie tret'e, Izdatelstvo Nauka, Moskva 1973, s. 112–113.

[3] Kogan I. M., *Teoria informacji i problemy bliżniej radiolokacji*, Izd. Sovetskoje Radio, Moskwa 1968.

[4] Kołaczyński S., *Cifrovyje morskije karty dla V-MF PNR*, rozprawa doktorska, V-MA, Leningrad 1983.

[5] Kołaczyński S., *Zawartość informacyjna współrzędnych pozycji okrętu*, „Forum Nawigacji", 2009, nr 1.

[6] Kołaczyński S., *Zawartość informacyjna współrzędnych prostokątnych na powierzchni kuli*, Z.N. WSGK, Kutno 2005.

[7] Nowakowski J., Sobczak W., *Teoria informacji*, WNT, Warszawa 1971.

[8] Simmonds A., *Wprowadzenie do transmisji danych*, WKŁ, Warszawa 1999.


# INFORMATION CONTENT ESTIMATION OF AUDITED RESULTS FOR DEPTH MEASUREMENT

## ABSTRACT


This article contains the first attempt of the information content estimation of the crossing observations errors adjustment. On the base of adjustment methods and definitions of the information theory, estimation of the information content of the adjusted result is given.



Keywords:

information theory, the development of the measurement results, the information content.