

**Stanisław Dobrociński, Leszek Flis**

Akademia Marynarki Wojennej  
Wydział Mechaniczno-Elektryczny, Instytut Budowy i Eksploatacji Okrętów  
81-103 Gdynia, ul. J. Śmidowicza 69  
e-mail: S.Dobrocinski@amw.gdynia.pl; L.Flis@amw.gdynia.pl

**Jerzy Małachowski**

Wojskowa Akademia Techniczna  
Wydział Mechaniczny, Katedra Mechaniki i Informatyki Stosowanej  
00-908 Warszawa, ul. S. Kaliskiego 2  
e-mail: jerzy.malachowski@wat.edu.pl

## STABILNOŚĆ ROZWIĄZAŃ SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH ZAGADNIEŃ DYNAMIKI

### STRESZCZENIE

W artykule przedstawiono wyniki obliczeń numerycznych zagadnienia rozchodzenia się fali naprężenia na przykładzie prostego pręta izotropowego. Wyniki numeryczne w zakresie sprężystym odniesiono do rozwiązania analitycznego, wskazując na poprawne działanie algorytmu. W zakresie plastycznym nie ma rozwiązań analitycznych, zaproponowano więc numeryczne rozwiązanie zagadnienia. Zastosowano algorytm obliczania naprężenia, który uwzględnia maksymalne wartości tego parametru w rozpatrywanym obszarze i modyfikuje krok czasowy w trakcie obliczeń dla utrzymania stabilności rozwiązania. Modyfikacji w trakcie obliczeń ulega również macierz sztywności, ponieważ w czasie rozpatrywanego zjawiska materiał ulega umocnieniu.

Celem pracy jest zwrócenie uwagi na znaczenie doboru kroku czasowego zapewniającego stabilność rozwiązania podczas obliczeń, szczególnie gdy materiał przechodzi ze stanu sprężystego w plastyczny. Zaproponowany algorytm przyspiesza rozwiązanie przy zachowaniu stabilności obliczeń w porównaniu z klasyczną metodą iteracyjną.

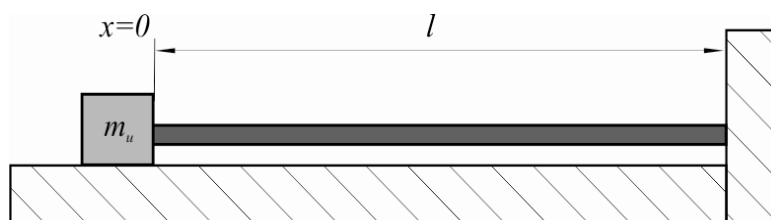
Słowa kluczowe:

MES, dynamika, fala sprężysto-plastyczna.

## WSTĘP

Zagadnienia dynamiki charakteryzują się tym, że w poszczególnych punktach rozważanego obszaru występuje dociążenie lub odciążenie konstrukcji [5]. W pracy rozpatruje się deformacje sprężyste oraz plastyczne w ciałach izotropowych i jednorodnych. Zagadnienia tego typu komplikuje znacznie fakt, że po przejściu fali uplastyczniającej materiał ulega wzmocnieniu. Dlatego przy powtórnym przejściu fali propagują się one w ciełe, napotykając różne granice sprężystości w poszczególnych punktach rozważanego obszaru. Istotna uwaga wynikająca z rozważań w niniejszej pracy dotyczy faktu, że w przypadku gdy w materiale wystąpią naprężenia powyżej granicy sprężystości, to część energii tracona jest na odkształcenia plastyczne i przy odciążeniu energia kinetyczna musi być pomniejszona o energię traconą [6].

Rozpatrzono pręt (rys. 1.) o stałym przekroju i przyjęto, że odkształcenia są na tyle małe, iż możemy stosować zasadę płaskich przekrojów, pomijając wpływ przemieszczeń poprzecznych na przemieszczenia wzdłużne.

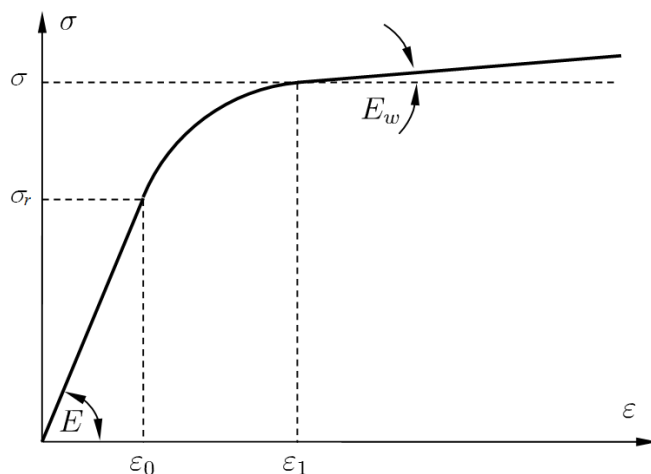


Rys. 1. Rozpatrywany schemat uderzenia masy  $m$  w pręt o długości  $l$ . Pręt o średnicy  $d = 0,01$  m, długości  $l = 20$  m i gęstości  $\rho = 7850$  kg/m<sup>3</sup> jest na prawym końcu utwierdzony, a na lewym końcu znajduje się masa skupiona  $m_w = 3298,45$  kg

*Źródło: opracowanie własne.*

Pręt wykonany jest ze stali 10GHMBA (węgiel, magnez, chrom, molibden, bar). Charakterystykę stali określono na podstawie próby jednoosiowego rozciągania (rys. 2.). Aproksymując tę charakterystykę funkcją sklejaną, według poniższych zależności, otrzymano bardzo dobrą zgodność funkcji aproksymującej i funkcji aproksymowanej, określonej z eksperymentu.

$$\begin{aligned} \sigma &= E\varepsilon & \text{dla} & \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0 \\ \sigma &= f(\varepsilon) & \text{dla} & \quad \varepsilon_0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1 \\ \sigma &= E_w\varepsilon & \text{dla} & \quad \varepsilon \geq \varepsilon_1 \\ \frac{df}{d\varepsilon} &= \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E & \text{dla} & \quad \varepsilon = \varepsilon_0 \\ \frac{df}{d\varepsilon} &= \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E_w & \text{dla} & \quad \varepsilon = \varepsilon_1 \end{aligned}$$



Rys. 2. Przyjęta charakterystyka materiałowa stali 10GHMBA, gdzie:  
 $E = 2,08 \cdot 10^5$  MPa — moduł Younga,  $E_w = 1,25 \cdot 10^5$  MPa — wzmocnienie,  
 $\sigma_0 = 612,96$  MPa,  $\sigma_1 = 703,90$  MPa,  $\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}$ ,  $\varepsilon_1 = 7,2866 \cdot 10^{-3}$

Źródło: opracowanie własne.

### OPIS DYSKRETNY PRĘTA

Aby ocenić wpływ nieliniowej części charakterystyki, opisaną funkcją  $\sigma = f(\varepsilon)$ , rozpatrzmy trójwęzłowy element pręta o długości  $l_e$ . Przeszyczenia dowolnego punktu elementu pręta zapiszemy jako kombinację przeszczeń jego węzłów  $\mathbf{U}^T = [U_1(t), U_2(t), U_3(t)]$  oraz funkcji kształtu  $\Phi = [\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)]$

$$u(x,t) = \Phi(x) \mathbf{U}(t).$$

Prędkość i przyspieszenie wyrażamy również za pomocą wartości węzłowych

$$\dot{u}(x,t) = \mathbf{\Phi}(x) \dot{\mathbf{U}}(t), \quad \ddot{u}(x,t) = \mathbf{\Phi}(x) \ddot{\mathbf{U}}(t).$$

Energię kinetyczną elementu pręta  $E_k = \frac{\rho A}{2} \int_0^{l_e} \dot{u}^2 dx$  zapisujemy za pomocą

wartości węzłowych, otrzymując

$$E_k = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^T \int_0^{l_e} \rho A \mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Phi} dx \dot{\mathbf{U}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M}^e \dot{\mathbf{U}},$$

gdzie:

$\mathbf{M}^e = \int_0^{l_e} \rho A \mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Phi} dx$  — macierz bezwładności elementu pręta;

$A$  — pole przekroju poprzecznego pręta.

Odształcenia w elemencie wyrażą się wzorem  $\varepsilon(x,t) = \mathbf{\Phi}_{,x} \mathbf{U}$ . Jeżeli do całkowania będziemy wykorzystywać metodę Gaussa, to w  $i$ -tym punkcie odształcenie wyrazi się jako  $\varepsilon_i(x,t) = \mathbf{\Phi}_{,x}(x_i) \mathbf{U}$ . Dla pięciopunktowej procedury Gaussa otrzymamy:

$$[\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \varepsilon_3 \ \varepsilon_4 \ \varepsilon_5]^T = [\varphi_{1,x}(x_i) \ \varphi_{2,x}(x_i) \ \varphi_{3,x}(x_i)] \mathbf{U}.$$

Oznaczając  $\mathbf{B} = [\varphi_{1,x}(x_i) \ \varphi_{2,x}(x_i) \ \varphi_{3,x}(x_i)]$  odształcenia w punktach całkowania, zapiszemy macierzowo  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{U}$ . Odształceń poszukujemy dla  $j$ -tego przyrostu obciążenia. Jeżeli w kolejnym kroku obciążenia przemieszczenie wzrasta o wartość  $\Delta \mathbf{U}$ , to całkowite przemieszczenia zapiszemy jako

$$\mathbf{U}_j = \mathbf{U}_{j-1} + \Delta \mathbf{U},$$

i dalej

$$\boldsymbol{\varepsilon}_j = \boldsymbol{\varepsilon}_{j-1} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{j-1} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{U}, \quad \text{przy czym} \quad \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \Delta \mathbf{U}} = \mathbf{B}^T.$$

## KOREKCJA MACIERZY SZTYWNOŚCI W ZALEŻNOŚCI OD OBCIĄŻENIA

Rozpatrzono następujące przedziały uwzględniane przy określaniu energii właściwej:

1. Pręt znajduje się w stanie sprężystym (rys. 3a), czyli  $(\varepsilon_{i-1} + \Delta\varepsilon) \leq \varepsilon_0$ .

Energia właściwa w takim przypadku wynosi

$$\Phi_i = \frac{E}{2} (\varepsilon_{i-1} + \Delta\varepsilon)^2 = \Phi_{i-1} + \frac{E}{2} [\varepsilon_{i-1} \Delta\varepsilon + (\Delta\varepsilon)^2].$$

Obliczamy pochodną energii właściwej względem przyrostu przemieszczeń

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Delta U} = E (\varepsilon_{i-1} \mathbf{B}^T + \mathbf{B}^T \mathbf{B} \Delta U),$$

a następnie całkujemy po objętości pręta, otrzymując

$$A \int_0^{l_e} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \Delta U} dx = \mathbf{Q}^e + \mathbf{K}^e \Delta U,$$

gdzie:

$$\mathbf{Q}^e = A \int_0^{l_e} E (\varepsilon_{i-1} \mathbf{B}^T) dx = A \int_0^{l_e} \sigma_{i-1} \mathbf{B}^T dx \text{ jest wektorem (macierz jednokolumnowa);}$$

$$\mathbf{K}^e = A \int_0^{l_e} E (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) dx \text{ jest macierzą.}$$

2. Pręt znajduje się w stanie sprężystym  $\varepsilon_{i-1} < \varepsilon_0$ , natomiast skutkiem przyrostu obciążenia  $(\varepsilon_{i-1} + \Delta\varepsilon) > \varepsilon_0$  są odkształcenia plastyczne (rys. 3b).

Odkształcenia plastyczne zapiszemy jako

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{i-1} + \Delta\varepsilon - \varepsilon_0 = \Delta\varepsilon - (\varepsilon_0 - \varepsilon_{i-1}) = \Delta\varepsilon - \varepsilon_{0i}.$$

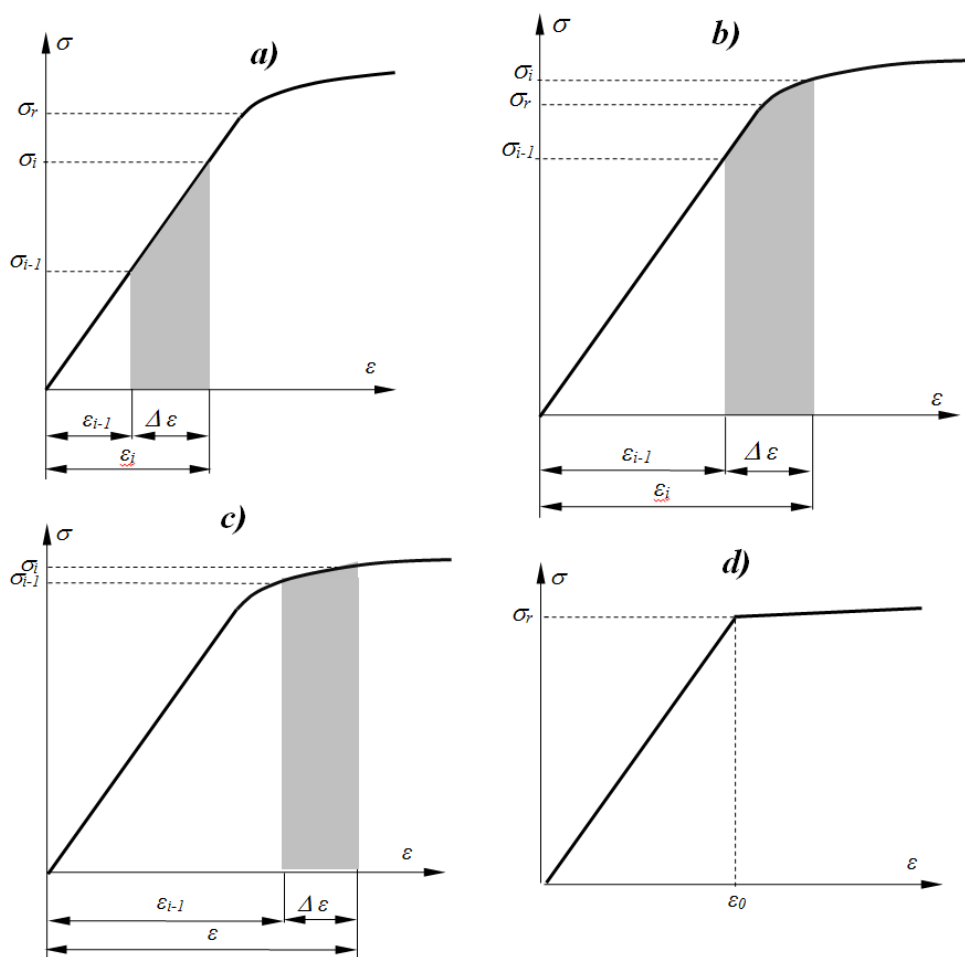
Dla tego przypadku określamy energię właściwą

$$\Phi_i = \frac{1}{2} \sigma_r \varepsilon_0 + \sigma_r \varepsilon_p + \frac{1}{2} E_w \varepsilon_p^2 = \frac{1}{2} \sigma_r \varepsilon_0 + \sigma_r (\Delta\varepsilon - \varepsilon_{0i}) + \frac{1}{2} E_w (\Delta\varepsilon - \varepsilon_{0i})^2;$$

$$\Phi_i = \frac{1}{2} \sigma_r \varepsilon_0 - \sigma_r \varepsilon_{0i} + \frac{1}{2} E_w \varepsilon_{0i}^2 + \sigma_r (\Delta \varepsilon) + \frac{1}{2} E_w [(\Delta \varepsilon)^2 - 2 \Delta \varepsilon \varepsilon_{0i}].$$

Po kolejnych przekształceniach otrzymujemy

$$\Phi_i = \Phi_{0i} + \sigma_r \Delta \varepsilon + \frac{1}{2} E_w [(\Delta \varepsilon)^2 - 2 \Delta \varepsilon \varepsilon_{0i}].$$



Rys. 3. Rozpatrywane przedziały uwzględniane przy określaniu energii właściwej

Źródło: opracowanie własne.

Człon  $\Phi_{0i}$  nie zależy od przyrostu przemieszczeń, stąd

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Delta U} = \sigma_r \mathbf{B}^T + E_w \mathbf{B}^T \mathbf{B} \Delta U - E_w \mathbf{B}^T \varepsilon_{0i} + \frac{1}{2} \frac{\partial E_w}{\partial \varepsilon} \mathbf{B}^T \Delta \varepsilon (\Delta \varepsilon - 2 \varepsilon_{0i})$$

lub

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Delta U} = \left( \sigma_r - E_w \varepsilon_{0i} - \frac{\partial E_w}{\partial \varepsilon} \varepsilon_{0i} \right) \mathbf{B}^T + \left( E_w + \frac{1}{2} \frac{\partial E_w}{\partial \varepsilon} \Delta \varepsilon \right) \mathbf{B}^T \mathbf{B} \Delta U.$$

Wprowadzamy oznaczenia

$$\mathbf{Q}^e = \int_0^{l_e} \left( \sigma_r - E_w \varepsilon_{0i} - \frac{\partial E_w}{\partial \varepsilon} \varepsilon_{0i} \right) \mathbf{B}^T dx = \int_0^{l_e} \left[ \sigma_r - \left( E_w + \frac{\partial E_w}{\partial \varepsilon} \varepsilon_{0i} \right) \Delta \varepsilon \right] \mathbf{B}^T dx;$$

$$\mathbf{K}^e = \int_0^{l_e} \left( E_w + \frac{1}{2} \frac{\partial E_w}{\partial \varepsilon} \varepsilon_{0i} \right) \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx = \int_0^{l_e} \left[ E_w + \frac{1}{2} \frac{\partial E_w}{\partial \varepsilon} (\varepsilon_0 - \varepsilon_{i-1}) \right] \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx.$$

3. Pręt znajduje się w stanie plastycznym  $(\varepsilon_{i-1} + \Delta \varepsilon) > \varepsilon_0$  (rys. 3c).

Na podstawie rysunku 3c określamy energię właściwą

$$\Phi_i = \Phi_{i-1} + \sigma_{i-1} \Delta \varepsilon + \frac{E_w}{2} (\Delta \varepsilon)^2$$

i obliczamy pochodną

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Delta U} = \sigma_{i-1} \mathbf{B}^T + E_w \mathbf{B}^T \mathbf{B} \Delta U + \frac{1}{2} \frac{\partial E_w}{\partial \varepsilon} \mathbf{B}^T (\Delta \varepsilon)^2.$$

Analogicznie jak w poprzednich punktach przyjmujemy

$$\mathbf{Q}^e = \int_0^{l_e} (\sigma_{i-1} \mathbf{B}^T) dx, \quad \mathbf{K}^e = \int_0^{l_e} \left( E_w + \frac{1}{2} \frac{\partial E_w}{\partial \varepsilon} \Delta \varepsilon \right) (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) dx.$$

Wykorzystując równania Lagrange'a, otrzymujemy następujące równanie ruchu pręta:

$$\mathbf{K} \Delta U + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} = \mathbf{Q}.$$

Całkowania równia ruchu dokonamy metodą Newmarka z krokiem czasowym  $\Delta t$ . Znając dla czasu  $t$  wartości przemieszczenia  $U_t$ , prędkości  $\dot{U}_t$  oraz przyspieszenia  $\ddot{U}_t$ , poszukujemy tych wartości dla czasu  $t + \Delta t$  według wzorów:

$$\ddot{U}_{t+\Delta t} = \frac{4}{(\Delta t)^2}(U_{t+\Delta t} - U_t) - \frac{4}{\Delta t}\dot{U}_t - \ddot{U}_t, \quad \dot{U}_{t+\Delta t} = \frac{2}{\Delta t}(U_{t+\Delta t} - U_t) - \dot{U}_t.$$

Jeżeli przyjmiemy  $U_{t+\Delta t} = U_t + \Delta U$ , to równanie ruchu zapisze się wzorem

$$F = \left[ \mathbf{K} + \frac{4}{(\Delta t)^2} \mathbf{M} \right] \Delta U = \mathbf{M} \left( \frac{4}{\Delta t} \dot{U}_t + \ddot{U}_t \right) - \mathbf{Q}.$$

W przypadku gdy pręt znajduje się w stanie plastycznym, to wartość  $\mathbf{K}$  zależy od rozwiązania, czyli zagadnienie jest nieliniowe. Dlatego wartości przyrostu przemieszczenia w danym kroku czasowym poszukiwać będziemy iteracyjnie, wykorzystując metodę Newtona. Jeżeli przyjmiemy

$$F = \left( \mathbf{K} + \frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) \Delta U - \mathbf{M} \left( \frac{4}{\Delta t} \dot{U}_t + \ddot{U}_t \right) + \mathbf{Q},$$

to

$$\frac{\partial F}{\partial \Delta U} = \left( \mathbf{K} + \frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \varepsilon} \frac{d\varepsilon}{d\Delta U} \Delta U - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \varepsilon} \frac{d\varepsilon}{d\Delta U} U_t,$$

ponieważ  $\varepsilon = \frac{U_t + \Delta U}{l}$ , to  $\frac{d\varepsilon}{d\Delta U} = \frac{1}{l}$ .

Zgodnie z metodą Newtona, w kolejnym kroku iteracyjnym obliczamy poprawkę dla przemieszczenia według wzoru

$$\frac{\partial F}{\partial \Delta U} \delta U = -F,$$

a następnie obliczamy  $\Delta U = \Delta U + \delta U$ .

Opisując materiał charakterystyką biliniową (rys. 3d), we wzorach na obliczanie macierzy sztywności wielkość  $\partial E_w / \partial \varepsilon = 0$ . Jeżeli weźmiemy pod uwagę



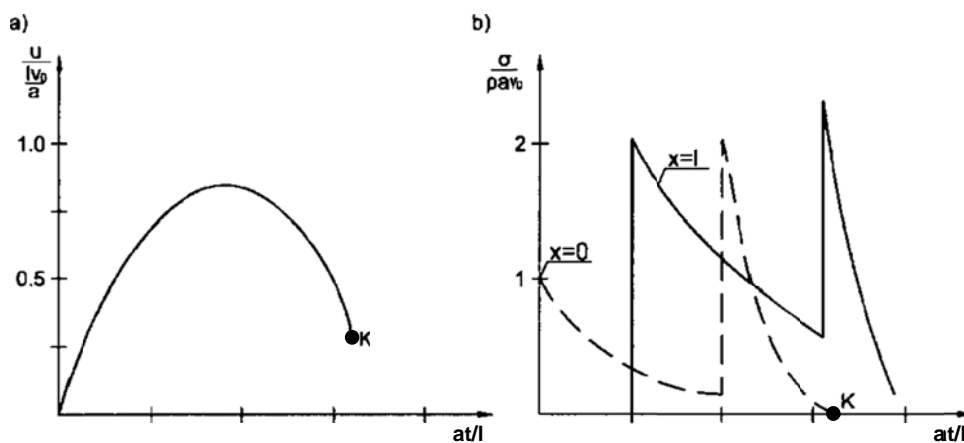
dwa sąsiadujące punkty pręta, przy czym jeden z nich znajduje się w stanie sprężystym, a drugi w stanie plastycznym, to wystąpi skokowa zmiana wyrazów macierzy sztywności odpowiadających tym punktom [2]. Uwzględniając nieliniową część charakterystyki, uzyskamy w miarę monotoniczną zmianę wyrazów macierzy sztywności. Oczywiście zmiana zależy od przyrostu obciążenia, gęstości podziału rozważanego obszaru na elementy oraz wielkości kroku czasowego.

### WYKORZYSTANIE ALGORYTMU NA PRZYKŁADZIE PROPAGACJI FALI NAPRĘŻENIA W PRĘCIE

Rozpatrzono przypadek, gdy masa uderzająca jest równa masie pręta. Nie możemy przyjąć, że naprężenia w całym pręcie są takie same. Musimy wziąć pod uwagę propagację frontu fali naprężenia wzdłuż osi pręta. W tym przypadku, jeżeli masa uderzająca porusza się z prędkością  $v_0$ , to dla czasu  $t_0$  w przekroju pręta  $x = 0$  powstaną naprężenia  $\sigma_1 = \rho a v_0$ , gdzie  $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  jest prędkością propagacji czoła fali naprężenia.

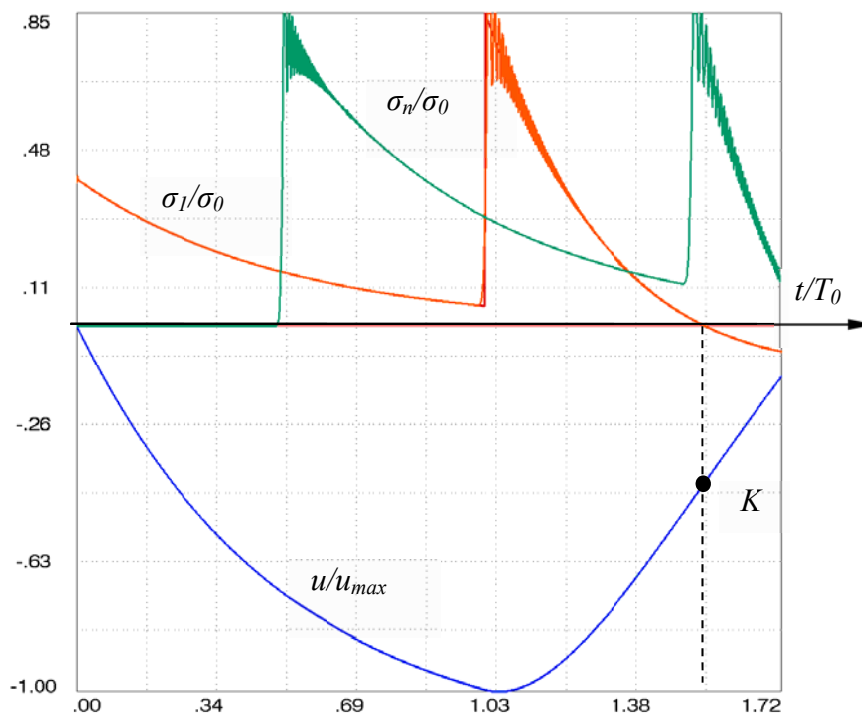
Przyjmując prędkość masy uderzającej taką ( $v_0 = 6,067$  m/s), aby dla czasu  $t = 0$  naprężenie  $\sigma_1 = \sigma|_{x=0} = 0,4 \sigma_0$ , mamy pewność, że po odbiciu od utwierdzenia naprężenie  $\sigma_n = \sigma|_{x=L}$  (wzrastają dwukrotnie) nie przekroczy granicy sprężystości. Pręt będzie się znajdował w stanie sprężystym i rozwiązanie analityczne [3] (rys. 4.) jest niemal identyczne z rozwiązaniem numerycznym (rys. 5.). W momencie, gdy  $\sigma_1$  przyjmuje wartość zero, to czas  $t = t_k$  i następuje oderwanie masy uderzającej od pręta.

Przyjmując prędkość  $v_0$  taką, aby dla czasu  $t = 0$  naprężenie  $\sigma_1 = \sigma|_{x=0} = 0,8 \sigma_0$ , otrzymamy rozwiązanie przedstawione na rysunku 6. W końcowej części pręta wystąpią odkształcenia plastyczne (rys. 7.).



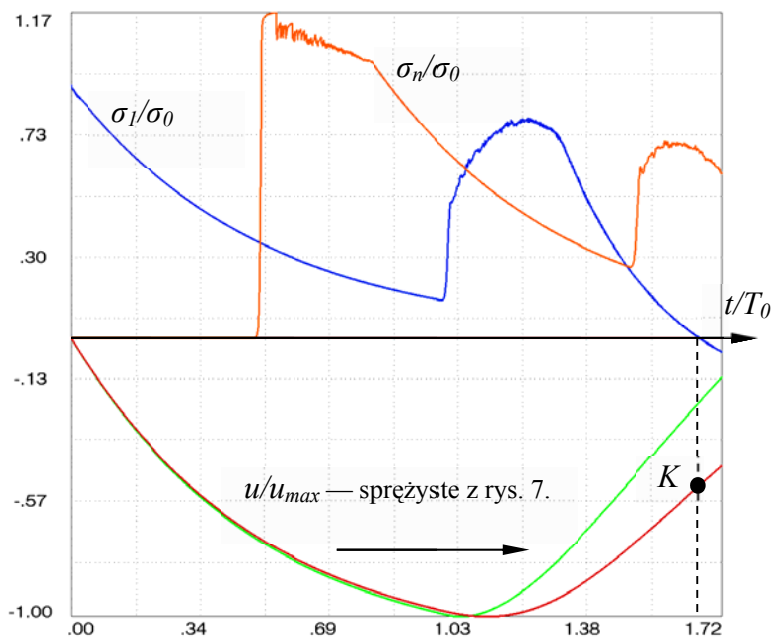
Rys. 4. Teoretyczny przebieg przemieszczenia w punkcie środkowym uderzanej powierzchni pręta masą  $m$  ( $x = 0$ ) (a) i naprężenia w punktach ( $x = 0$  i  $x = l$ ) (b)

Źródło: Kaliski S. i inni, *Drgania i fale w ciałach stałych*, PAN, Warszawa 1966.



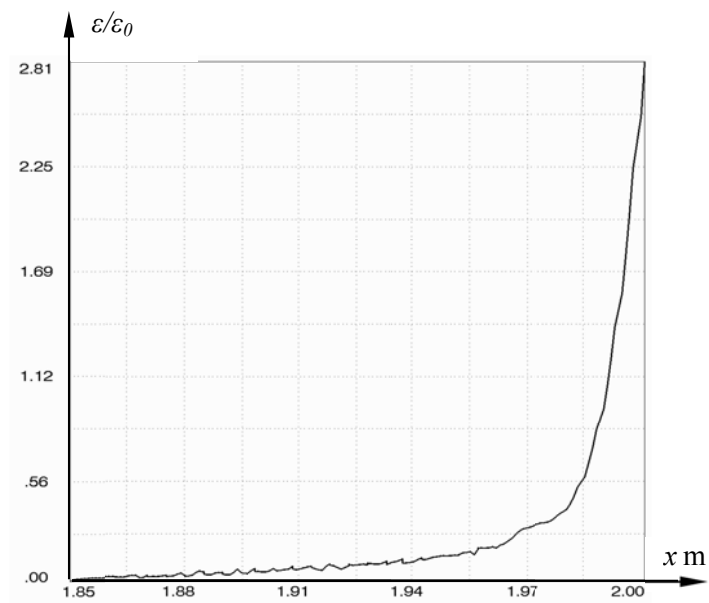
Rys. 5. Rozwiązanie numeryczne uderzenia w pręt w zakresie sprężystym masą przy założeniach:  $\sigma_1 = 0,4\sigma_0$ ,  $T_0 = l_0 / 4a$

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 6. Rozwiązanie numeryczne uderzenia w pręt w zakresie sprężystym masą przy założeniach:  $\sigma_1 = 0,8\sigma_0$ ,  $T_0 = l_0/4a$

Źródło: opracowanie własne.

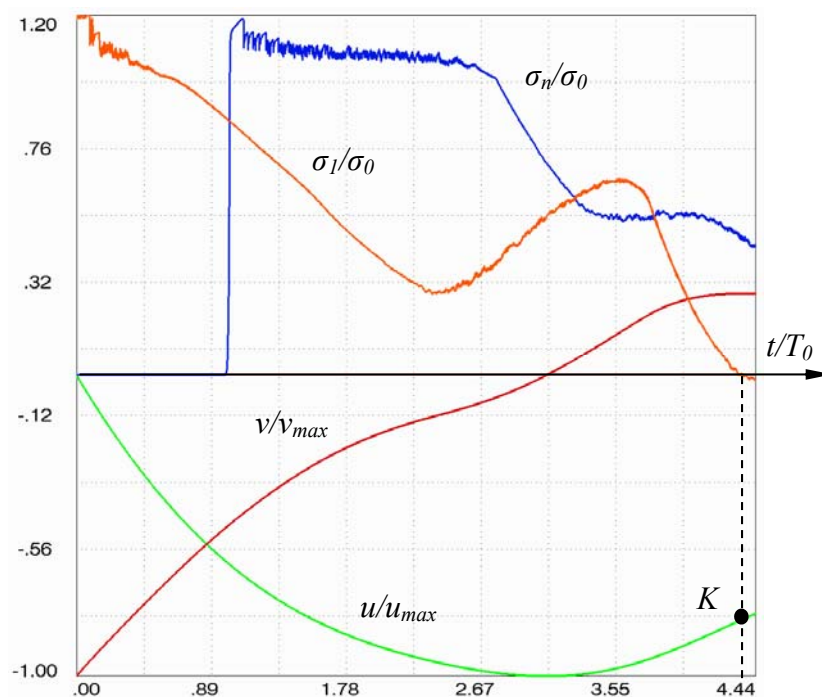


Rys. 7. Odkształcenia plastyczne w końcowej części pręta

Źródło: opracowanie własne.

Na długości 0,15 m sztywność pręta zmienia się według stosunku  $E/E_w$ , czyli w granicach 1–0,006. Dla biliniowej charakterystyki materiału wystąpiłaby skokowa zmiana sztywności powodująca złe uwarunkowanie macierzy sztywności pręta. Uwzględniając nieliniową część charakterystyki w przedziale odkształceń  $(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$  oraz odpowiednio gęsty podział na elementy, uzyskujemy monotoniczną zmianę współczynników macierzy sztywności.

Jeżeli przyjmiemy prędkość  $v_0$  taką, aby dla czasu  $t = 0$  naprężenie  $\sigma_1 = \sigma|_{x=0} = 2,0 \sigma_0$ , otrzymamy rozwiązanie przedstawione na rysunku 8.



Rys. 8. Rozwiązanie numeryczne uderzenia w pręt w zakresie plastycznym masą przy założeniach:  $\sigma_1 = 2,0 \sigma_0$ ,  $T_0 = l_0 / 2a$

Źródło: opracowanie własne.

W obu końcach pręta występują odkształcenia plastyczne (rys. 9.). Energia kinetyczna masy uderzającej wynosi

$$E_{k0} = 0,5 m_u v_u^2,$$

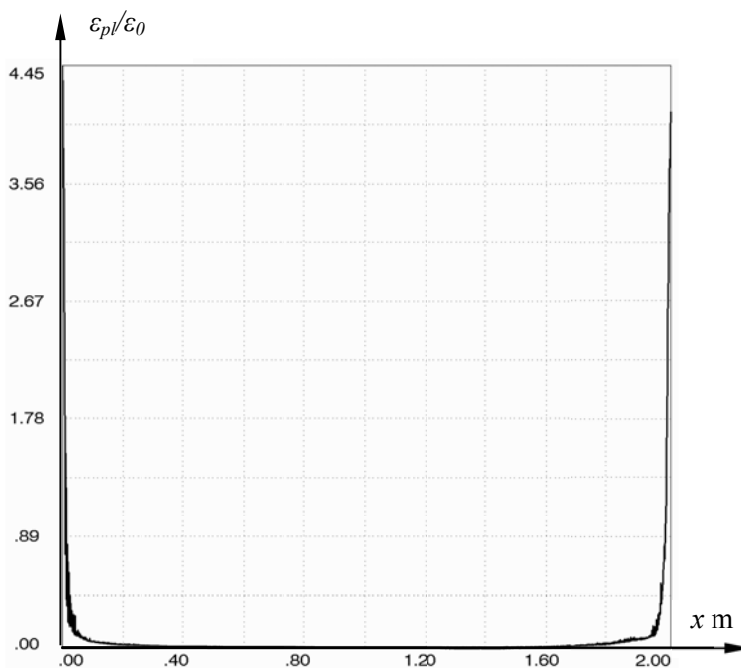
natomiast energię kinetyczną pręta dla czasu  $t$  obliczymy wzorem

$$E_k = \frac{\rho A}{2} \int_0^l \dot{u}^2(x) dx.$$

Obliczając energię jako pracę sił wewnętrznych na przemieszczeniach jednostkowych, otrzymamy

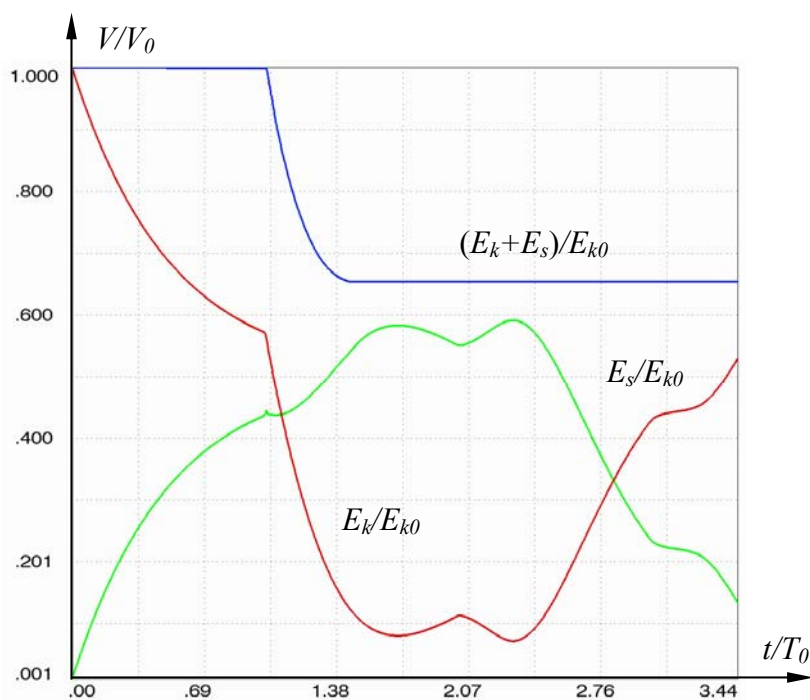
$$E_s = \frac{A}{2} \int_0^l \sigma \varepsilon dx.$$

Zmianę energii w czasie przedstawiono na rysunku 10., gdzie wyraźnie widać spadek energii całkowitej kosztem trwałych odkształceń plastycznych.



Rys. 9. Odkształcenia plastyczne w obu końcach pręta

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 10. Zmiana energii w czasie z widoczną stratą energii całkowitej na odkształcenie plastyczne

Źródło: opracowanie własne.

## WNIOSKI

Obliczenia numeryczne w zakresie sprężystym są zgodne z obliczeniami analitycznymi. W zakresie sprężysto-plastycznym i plastycznym wykorzystano ten sam algorytm, a wyniki obliczeń numerycznych wydają się intuicyjnie poprawne. Do ostatecznej weryfikacji algorytmu, zarówno w tym, jak i we wszystkich zagadnieniach plastycznych, konieczna jest weryfikacja eksperymentalna.

*Obliczenia wykonano na komputerach Centrum Informatycznego Trójmiejskiej Akademickiej Sieci Komputerowej.*

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Bathe K. J., *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, New Jersey 1996.
- [2] Dobrociński S., *Stabilność rozwiązań zagadnień odporności udarowej konstrukcji*, Akademia Marynarki Wojennej, Gdynia 2000.
- [3] Kaliski S. i inni, *Drgania i fale w ciałach stałych*, PAN, Warszawa 1966.
- [4] Kłosowski P., Woźnica K., Weichert D., *Comparison of numerical modeling and experiments for the dynamic response of circular elasto-viscoplastic plates*, 'European Journal of Mechanics', 2000, 19, A/Solids.
- [5] Meyers M. A., *Dynamic behaviour of materials*, A Wiley-Interscience Publication, 1994.
- [6] Potter D., *Metody obliczeniowe fizyki*, PWN, Warszawa 1977.

## STABILITY OF SOLUTIONS ELASTIC-PLASTIC DYNAMIC ISSUES

### ABSTRACT

This paper presents the results of numerical wave propagation problems with the example of a simple isotropic bar tension. Numerical results were compared to the elastic analytical solution, indicating the correct algorithm operation. There are no analytical solutions in terms of plastic conditions, so the numerical solution of this problem is proposed. The article gives an algorithm for calculating the stress that includes account the maximum value of the parameter in this question and in the same time modifies the time step in the calculations for the stability of the solution. Modifications in the calculation of the stiffness matrix are caused by the phenomenon of material strengthening. The proposed algorithm dramatically accelerates the solution when the stability of the computation takes place comparing to classical iterative method.

The aim of this study is to highlight the importance of the selection of the time step in calculating the stability of solutions, especially when the state of elastic material goes into plastic.

The proposed algorithm accelerates the solution when the stability of the computation takes place and compared to classical iterative method.

Keywords:

finite element method, dynamic, elastic-plastic wave.