

Piotr Kordzikowski
Politechnika Krakowska

WYTĘŻENIE WYBRANYCH MATERIAŁÓW ANIZOTROPOWYCH Z ASYMETRIĄ ZAKRESU SPRĘŻYSTEGO

STRESZCZENIE

W artykule podsumowano zagadnienia dokładnie omawiane we wcześniejszych pracach autora dotyczących wyężenia materiału oraz przedstawiono krótki rys historyczny związany z powstawaniem kryteriów wytrzymałościowych. Omówiono również pojęcie energii sprężystej oraz wynikające stąd hipotezy wyężeniowe E. Beltramego, M. T. Hubera i W. Burzyńskiego dla materiałów izotropowych oraz J. Rychlewskiego dla materiałów anizotropowych. Przytoczone zostało też kryterium P. S. Theocarisa, które posłużyło do przeanalizowania możliwości uogólnienia kwadratowego kryterium Rychlewskiego dla dowolnych materiałów anizotropowych wykazujących efekt różnicy wytrzymałości (*Strength Differential Effect*).

Słowa kluczowe:

anizotropowe materiały, kryterium wyężenia, sprężyste stany własne.

WSTĘP

Zaproponowane przez J. Rychlewskiego energetyczne kryterium stanu granicznego dla sprężonych stanów własnych stanowi podstawę teorii wyężenia materiałów, które w ogólności wykazują anizotropię własności mechanicznych [14, 15, 23, 24]. W kryterium energetycznym należy określić graniczne energie dla poszczególnych sprężystych stanów własnych, których w ogólności może być co najwyżej sześć. Te graniczne energie można wyznaczyć doświadczalnie lub obliczyć. Propozycję obliczania granicznych energii podano w [17] i dyskutowano dokładniej w [6, 18]. Obliczenie granicznych energii dla modelu efektywnego, za pomocą którego można przewidywać sprężyste zachowanie się materiału na podstawie teoretycznego opisu jego struktury, dokładnie przedstawiono w pracach [7–13].

ZAGADNIENIE WYŁĘŻENIA MATERIAŁU — TŁO HISTORYCZNE, ENERGIA SPRĘŻYSTA

Zagadnienie wyłężenia materiału jest problemem skomplikowanym i trudnym do ścisłego, teoretycznego rozwiązania. Często dla ułatwienia, jak pisze J. Walczak [29], „...opieramy się na ocenie porównawczej. Sposób ten polega na tym, że za porównawczy stan wyłężenia przyjmujemy z reguły najprostszy przypadek, jakim jest jednoosiowe rozciąganie, określone na granicy niebezpiecznej jednym tylko parametrem krytycznym...”. Istotą takiego podejścia jest wyznaczenie tzw. naprężenia zastępczego, czyli naprężenia przy jednoosiowym rozciąganiu, powodującego wyłężenie równoważne co do wartości wyłężeniu wynikającemu z danego stanu naprężenia. Metoda ta wymaga podania kryterium wyłężenia, które określi miarę wyłężenia pozwalającą na dokonanie takiego porównania dowolnego stanu naprężenia z odpowiadającym mu pod względem wyłężenia przypadkiem jednoosiowym. Niemniej jednak wskazanie takiej miary wyłężenia, odpowiadającej dowolnemu stanowi naprężenia, wciąż jest problemem otwartym, a jedyną metodą jej weryfikacji jest doświadczenie. Stąd też wszelkie propozycje, które się pojawiały, opierają się jedynie na hipotezach, zwanych hipotezami wytrzymałościowymi. Na przestrzeni wieków, a trzeba zaznaczyć, że pierwsze prace związane z tym zagadnieniem poruszali Leonardo da Vinci (1452–1519) i Galileusz (1564–1642), ukształtowało się kilka głównych nurtów powstawania hipotez wytrzymałościowych. Zalicza się tu hipotezy naprężeniowe, odkształceniowe, energetyczne, mieszane i probabilistyczne.

Pierwsze kryterium wyłężenia sformułował Galileusz w 1632 roku, przyjmując za miarę wyłężenia maksymalną wartość z bezwzględnych wartości ekstremalnych naprężeń normalnych. Można wykazać, że hipoteza ta zawodzi w wielu ważnych przypadkach.

Hipotezy wykorzystujące pojęcie energii sprężystej rozpoczęły dynamiczny rozwój nauki o wytrzymałości materiałów. Prekursorem takiego ujęcia zagadnienia jest Eugenio Beltrami (1835–1899), który w 1885 roku zaproponował jako miarę wyłężenia gęstość energii odkształcenia sprężystego. Kontynuatorem tej koncepcji był Maksymilian Tytus Huber (1872–1950), który wprowadził jednak pewne ograniczenia. Polski uczoney ogłosił swoją hipotezę w 1904 roku, przyjmując, że o lokalnej utracie sprężystości ciała decyduje gęstość energii odkształcenia postaciowego [4]. Obecnie wiadomo, że niemal pół wieku wcześniej taką samą ideę proponował J. C. Maxwell, jednak jego list do W. Thompsona z 1856 roku, w którym ją przedstawił, został opublikowany dopiero w 1936 roku. Kryterium Hubera stało się znane i jest powszechnie używane jako energetyczny warunek wyłężenia dla ciał izotropowych,

choć początkowo przypisane zostało Richardowi von Misesowi (1883–1953). Kłopotliwe jednak okazało się uogólnienie tej hipotezy dla materiałów wykazujących anizotropię sprężystą.

Pierwszą propozycję warunku granicznego dla materiału anizotropowego przedstawił Mises w 1928 roku w postaci:

$$\mathbf{D}_\sigma \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{D}_\sigma \leq 1, \quad (1)$$

gdzie:

\mathbf{H} — tensor czwartego rzędu zwany tensorem granicznym;

\mathbf{D}_σ — dewiator naprężenia.

Niemiecki uczony podając swój warunek, zaznaczał jednak, iż nie ma on charakteru energetycznego dla ciał anizotropowych. Wprowadzony przez Włodzimierza T. Burzyńskiego w 1928 roku pomysł addytywnego rozkładu energii pokazał, że Mises zbyt pochopnie dokonał takiej oceny.

Dowód energetycznego charakteru warunku Misesa, co więcej — każdego kwadratowego kryterium granicznego, przedstawił dopiero Jan Rychlewski w latach osiemdziesiątych XX wieku. Dzięki wprowadzeniu energetycznie ortogonalnego podziału stanu naprężenia Rychlewski sformułował energetyczny warunek graniczny dla ciał anizotropowych w następującej formie:

$$\frac{1}{h_1} \Phi(\mathbf{T}_{\sigma_1}) + \frac{1}{h_2} \Phi(\mathbf{T}_{\sigma_2}) + \dots + \frac{1}{h_\rho} \Phi(\mathbf{T}_{\sigma_\rho}) \leq 1, \quad \rho \leq 6, \quad (2)$$

gdzie:

h_i — moduły Rychlewskiego;

$\Phi(\mathbf{T}_{\sigma_i})$ — gęstość energii sprężystej nagromadzonej w i -tym stanie energetycznie rozdzielonym.

Gęstość energii Φ dla ciała Hooke'a, przy założeniu małych wartości odkształceń ε , można przedstawić jako pracę naprężeń \mathbf{T}_σ wykonaną na odpowiadających im odkształceniach $\mathbf{T}_\varepsilon(\boldsymbol{\sigma})$, co zapisane zostanie w poniższy sposób [20]:

$$\Phi = \frac{1}{2} \mathbf{T}_\sigma \cdot \mathbf{T}_\varepsilon(\boldsymbol{\sigma}). \quad (3)$$

Dla ciała izotropowego gęstość energii można rozłożyć na sumę dwóch części — gęstość energii odkształcenia postaciowego Φ_f i gęstość energii objętościowej Φ_v :

$$\Phi = \Phi_f + \Phi_v. \quad (4)$$

Zarówno energię objętościową, jak i postaciową należy rozumieć jako części energii sprężystości odpowiadające za samą zmianę objętości bądź postaci ciała.

Powyższy podział energii jest konsekwencją podziału tensorów naprężenia i odkształcenia na części kulistą (aksjatorową) i dewiatorową:

$$\mathbf{T}_\sigma = \mathbf{A}_\sigma + \mathbf{D}_\sigma; \quad (5)$$

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \mathbf{A}_\varepsilon + \mathbf{D}_\varepsilon. \quad (6)$$

gdzie:

$\mathbf{A}_\sigma, \mathbf{A}_\varepsilon$ — aksjatory tensorów naprężenia i odkształcenia;

$\mathbf{D}_\sigma, \mathbf{D}_\varepsilon$ — dewiatory tensorów naprężenia i odkształcenia.

Podstawiając do wzoru (3) wyrażenia (5) oraz (6), otrzymano:

$$\Phi = \frac{1}{2}(\mathbf{A}_\sigma + \mathbf{D}_\sigma) \cdot (\mathbf{A}_\varepsilon + \mathbf{D}_\varepsilon). \quad (7)$$

Można wykazać, że naprężenia dewiatorowe nie wykonują pracy na przemieszczeniach aksjatorowych (i odwrotnie), czyli:

$$\mathbf{D}_\sigma \cdot \mathbf{A}_\varepsilon = \mathbf{D}_\varepsilon \cdot \mathbf{A}_\sigma = 0. \quad (8)$$

Wykorzystując zależność (8), gęstość energii sprężystej sprowadza się do postaci:

$$\Phi = \frac{1}{2}\mathbf{D}_\sigma \cdot \mathbf{D}_\varepsilon + \frac{1}{2}\mathbf{A}_\sigma \cdot \mathbf{A}_\varepsilon. \quad (9)$$

Porównanie (4) i (9) pozwala sformułować następujące postaci gęstości energii odkształcenia postaciowego i objętościowego:

$$\Phi_f = \frac{1}{2}\mathbf{D}_\sigma \cdot \mathbf{D}_\varepsilon; \quad (10)$$

$$\Phi_v = \frac{1}{2}\mathbf{A}_\sigma \cdot \mathbf{A}_\varepsilon. \quad (11)$$

Zależności pomiędzy dewiatorami i aksjatorami ustalają odpowiednio: prawo zmiany postaci oraz prawo zmiany objętości zapisane poniżej:

$$\mathbf{D}_\sigma = 2G\mathbf{D}_\varepsilon; \quad (12)$$

$$\mathbf{A}_\sigma = 3K\mathbf{A}_\varepsilon, \quad (13)$$

gdzie:

G — moduł ścinania;

K — moduł odkształcenia objętościowego

przyjmują odpowiednio wartości:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}.$$

Wykorzystując prawa zmiany postaci i objętości we wzorach (10) i (11), otrzymano ostateczne związki określające gęstości energii odkształcenia postaciowego i objętościowego w formie:

$$\Phi_f = \frac{1}{4G} \mathbf{D}_\sigma \cdot \mathbf{D}_\sigma; \quad (14)$$

$$\Phi_v = \frac{1}{6K} \mathbf{A}_\sigma \cdot \mathbf{A}_\sigma. \quad (15)$$

Po podstawieniu powyższych wyrażeń do (4), można określić, za pomocą naprężeń, gęstość energii sprężystej:

$$\Phi = \frac{1}{4G} \mathbf{D}_\sigma \cdot \mathbf{D}_\sigma + \frac{1}{6K} \mathbf{A}_\sigma \cdot \mathbf{A}_\sigma. \quad (16)$$

ENERGIA SPRĘŻYSTA, ZAGADNIENIE WYTYĘŻENIA MATERIAŁU WEDŁUG E. BELTRAMIEGO, M. T. HUBERA I W. BURZYŃSKIEGO

Włoski matematyk Eugenio Beltrami rozpoczął nowy rozdział w dziedzinie rozwoju zagadnień wytyężeniowych, proponując w 1885 roku zasadniczo inny sposób ujęcia problemu. Pomysł Beltramiego opierał się na założeniu, iż „za miarę wytyężenia należy uważać ilość energii sprężystości, jaką materiał jest w stanie nagromadzić w jednostce objętości do chwili osiągnięcia granicy niebezpiecznej (...)” [29]. Z racji tak przyjętego założenia kryterium to nosi często nazwę hipotezy krańcowej energii całkowitej odkształcenia.

Zgodnie z pomysłem Beltramiego jako miarę wyężenia W przyjmuje się gęstość całkowitej energii sprężystej, wyrażonej wzorem (16), co zapisujemy w następujący sposób:

$$W = \frac{1}{4G} \mathbf{D}_\sigma \cdot \mathbf{D}_\sigma + \frac{1}{6K} \mathbf{A}_\sigma \cdot \mathbf{A}_\sigma. \quad (17)$$

Wykorzystując zależności łączące moduły G oraz K z modulem Younga E i współczynnikiem Poissona ν , można zapisać miarę wyężenia w układzie naprężeń głównych po przekształceniach:

$$W = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) + \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]. \quad (18)$$

Stosując metodę porównawczą i przeprowadzając analogiczne rozumowanie do wyznaczenia wyężenia W_0 dla jednoosiowego rozciągania naprężeniem σ_0 , otrzymano:

$$W_0 = \frac{1}{2E} \sigma_0^2. \quad (19)$$

Porównanie wzorów (18) i (19) pozwala na wyznaczenie naprężenia zastępczego w myśl hipotezy Beltramiego:

$$\sigma_0 = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)}. \quad (20)$$

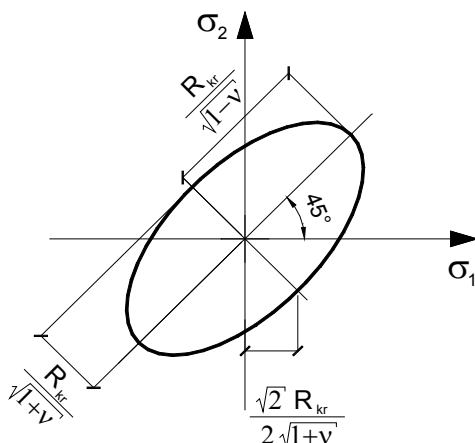
Rozważając stan niebezpieczny, przyjmuje się, że wyężenie materiału jest całkowite i w myśl wzoru

$$W = \frac{\sigma_1}{R_{gr}}, \quad W = 1.$$

Konsekwencją osiągnięcia przez materiał stanu granicznego jest wyrażenie:

$$\sigma_0 = R_{kr}, \quad R_{kr} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)}, \quad (21)$$

które można zinterpretować jako powierzchnię stanów granicznych według kryterium Beltramiego. Powierzchnia ta może być różna w zależności od wartości współczynnika Poissona ν . Na rysunku 1. pokazano przecięcie powierzchni granicznej płaszczyzną $\sigma_3 = 0$ dla wartości współczynnika Poissona spełniającej warunek $0 < \nu < 0,5$. W takim przypadku powierzchnię graniczną stanowi elipsa.



Rys. 1. Krzywa graniczna według kryterium Beltramiego przy przecięciu osią $\sigma_3 = 0$

Źródło: K. Porębski, *Specyfikacja kryterium wyężenia warstw kompozytowych z zastosowaniem wielomodalnych energetycznych warunków dla sprężystych stanów granicznych*, WIL, Politechnika Krakowska, Kraków 2007; J. Walczak, *Wytrzymałość materiałów oraz podstawy teorii sprężystości i plastyczności*, t. 2, PWN, Warszawa 1973.

Dla pozostałych wartości współczynnika Poissona powierzchnią graniczną, w złożonym stanie $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, jest kula ($\nu = 0$) lub walec kołowy ($\nu = 0,5$).

Kryterium wyężenia sformułowane na początku XX wieku przez Maksymiliana T. Hubera stanowi modyfikację hipotezy Beltramiego. Za pracą [20] zacytowane zostanie oryginalne sformułowanie kryterium przez polskiego uczonego: „Zważywszy, że odkształcenia objętościowe przy ściskaniu nie wpływają na niebezpieczeństwo pęknięcia, można z wielkim prawdopodobieństwem uważać energię postaciową za miarę wyężenia”. Założenie, które poczynił Huber, stało się podstawą do nazwania jego podejścia hipotezą krańcowej energii odkształcenia postaciowego.

Zgodnie z tym pomysłem oraz wykorzystując zależność (14), zapisano miarę wyężenia w postaci:

$$W = \frac{1}{4G} \mathbf{D}_\sigma \cdot \mathbf{D}_\sigma. \quad (22)$$

Dla przypadku jednoosiowego rozciągania naprężeniem σ_0 miara wyężenia W_0 przyjmie wartość:

$$W_0 = \frac{1}{6G} \sigma_0^2, \quad (23)$$

co przy ponownym wykorzystaniu metody porównawczej daje ogólne naprężenie zastępcze:

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\mathbf{D}_\sigma \cdot \mathbf{D}_\sigma} . \quad (24)$$

Rozpisanie składowych dewiatora naprężenia w układzie naprężeń głównych bądź w dowolnym układzie współrzędnych pozwala zapisać naprężenie zastępcze w formie:

$$\sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} \quad (25)$$

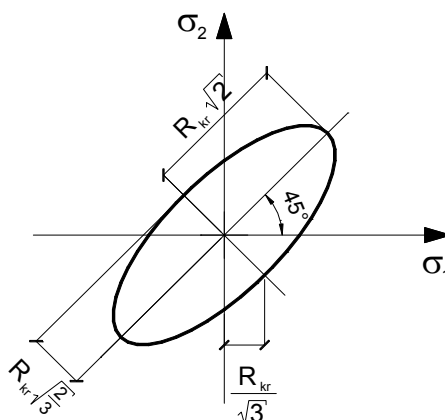
lub

$$\sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} . \quad (26)$$

W przypadku hipotezy Hubera równie łatwo dojrzeć równanie powierzchni granicznej. Stanowi ją walec kołowy, którego oś tworząca jest równo nachylona do osi układu naprężeń głównych, o przepisie:

$$R_{kr} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} . \quad (27)$$

Rysunek 2. przedstawia powierzchnię graniczną wg Hubera w płaskim stanie, czyli przecięcie walca Hubera płaszczyzną $\sigma_3 = 0$.



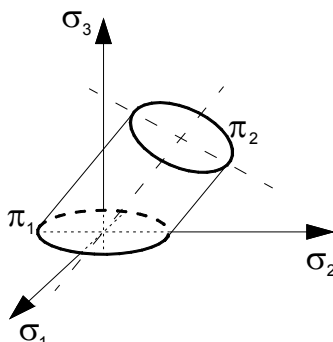
Rys. 2. Krzywa graniczna według hipotezy Hubera przy przecięciu osią $\sigma_3 = 0$

Źródło: K. Porębski, *Specyfikacja kryterium wyężenia warstw kompozytowych z zastosowaniem wielomodalnych energetycznych warunków dla sprężystych stanów granicznych*, wyd. cyt.; J. Walczak, *Wytrzymałość materiałów oraz podstawy teorii sprężystości i plastyczności*, wyd. cyt.

Z kolei na rysunku 3. pokazano walec Hubera wraz z zaznaczonymi przekrojami płaszczyznami o równaniach:

$\sigma_3 = 0$ — przekrój eliptyczny π_1 (przedstawiony szczegółowo na rysunku 3.);

$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ — przekrój kołowy π_2 .



Rys. 3. Walec Hubera

Źródło: K. Porębski, *Specyfikacja kryterium wytyżenia warstw kompozytowych z zastosowaniem wielomodalnych energetycznych warunków dla sprężystych stanów granicznych*, wyd. cyt.; J. Walczak, *Wytrzymałość materiałów oraz podstawy teorii sprężystości i plastyczności*, wyd. cyt.

Włodzimierz T. Burzyński (1900–1970), uczeń Hubera, przedstawił własną hipotezę wytrzymałościową w swojej pracy doktorskiej z 1928 roku pt. *Studium nad hipotezami wytyżenia*. Wnioskował w niej, że oparcie teorii wytyżenia materiałów powinno się odbywać na podstawie większej liczby testów doświadczalnych, odpowiadających różnym, prostym stanom naprężenia. Stąd też pomysł jego autorstwa brzmiał następująco: „Miarę wytyżenia lokalnego w obszarach sprężystych i plastycznych stanowi suma gęstości quasi-energii odkształcenia postaciowego i pewnej, zależnej od stanu naprężenia i własności indywidualnych ciała, części gęstości pseudo-energii odkształcenia objętościowego. (...) Matematyczną formą tak postawionej hipotezy jest równanie:

$$\Phi_f + \eta \cdot \Phi_v = K, \quad (28)$$

gdzie: η jest — jak z założenia wynika — funkcją własności indywidualnych, jako parametrów i stanu naprężenia, jako zmiennej niezależnej” [2];

K — wprowadzona wcześniej wartość graniczna R_{gr} .

Widać stąd, że uniwersalność hipotezy Burzyńskiego, reprezentowana wielkością κ , kryje się we współczynniku η pod użytym przez Burzyńskiego pojęciem własności indywidualnych.

Wprowadzone zostaną, zgodnie z propozycją Burzyńskiego, następujące dwie zależności:

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (29)$$

oraz

$$\sigma_f^2 = 12G\Phi_f, \quad (30)$$

gdzie:

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — wartości naprężeń głównych;

G — moduł ścinania;

σ_f — niezmiennik proporcjonalny do naprężenia ekwiwalentnego ($\sigma_f = \sqrt{2} \cdot \sigma_e$), odpowiadający gęstości energii odkształcenia postaciowego Φ_f .

Wykorzystując wzory (29) i (30) polski uczoney przedstawił swoje kryterium w postaci:

$$A\sigma_f^2 + B\sigma_m^2 + C\sigma_m - 1 = 0, \quad (31)$$

gdzie stałe A, B, C wyznaczyć należy z testów dla trzech najprostszych stanów naprężenia, dla których przyjęto odpowiednio:

T — jednoosiowe rozciąganie: $\sigma_f = \sqrt{2} \cdot \sigma_{gr.t}, \sigma_m = \frac{1}{3} \cdot \sigma_{gr.t}$;

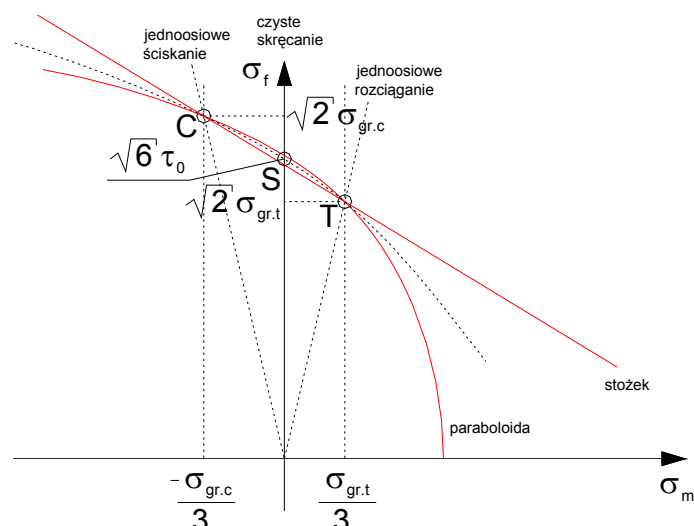
C — jednoosiowe ściskanie: $\sigma_f = \sqrt{2} \cdot \sigma_{gr.c}, \sigma_m = -\frac{1}{3} \cdot \sigma_{gr.c}$;

S — czyste skręcanie: $\sigma_f = \sqrt{6} \cdot \tau_0, \sigma_m = 0$.

Po wyznaczeniu stałych A, B, C wyrażenie (31) sprowadza się do postaci:

$$\frac{\sigma_{gr.t} \cdot \sigma_{gr.c}}{3\tau_0^2} \cdot \sigma_f^2 + \left(9 - \frac{3 \cdot \sigma_{gr.t} \cdot \sigma_{gr.c}}{\tau_0^2}\right) \cdot \sigma_m^2 + 3(\sigma_{gr.c} - \sigma_{gr.t}) \cdot \sigma_m - \sigma_{gr.t} \cdot \sigma_{gr.c} = 0. \quad (32)$$

Graficzna interpretacja funkcji granicznej (32) dla przypadku, w którym $\tau_0 = \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \sigma_{gr.t} \cdot \sigma_{gr.c}}$ przedstawiona została na rysunku 4. Przy takim założeniu równanie (32) w układzie osi głównych przyjmuje postać paraboloidy obrotowej. W ogólności hipoteza Burzyńskiego może także przyjmować formę elipsoidy lub hiperboloidy osiowo pokrywającej się z osią $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$.



Rys. 4. Interpretacja graficzna kryterium Burzyńskiego

Źródło: K. Porębski, *Specyfikacja kryterium wyteżenia warstw kompozytowych z zastosowaniem wielomodalnych energetycznych warunków dla sprężystych stanów granicznych*, wyd. cyt.; J. Walczak, *Wytrzymałość materiałów oraz podstawy teorii sprężystości i plastyczności*, wyd. cyt.

Warto również zauważyć, że podstawiając do równania (31) wartości stałych A , B , C , które uzyskane zostaną przy założeniach $\sigma_{gr.t} = \sigma_{gr.c} = \sigma_{gr}$ ($\kappa = 1$) oraz $\tau_0 = \frac{\sigma_{gr}}{\sqrt{3}}$, zgodnymi z hipotezą Hubera, powierzchnia graniczna uzyskana z hipotezy Burzyńskiego przyjmie postać walca Hubera. Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić przy założeniu $\tau_0 = \frac{\sigma_{gr}}{2\sqrt{1+\nu}}$. Wówczas otrzymuje się elipsoide zgodną z warunkiem Beltramiego.

Z uwagi na dość skomplikowaną postać powierzchni granicznej (32) oraz utrudnione jej wyznaczanie, można posłużyć się tzw. zlinearyzowaną hipotezą Burzyńskiego, w myśl której krzywą graniczną przedstawioną na rysunku 4. aproksymuje się odcinkami prostych. Podejście takie szczegółowo omówione jest w pracy [29].

ANALIZA WARUNKÓW WYTEŻENIA DLA ANIZOTROPOWYCH MATERIAŁÓW

Dla materiału deformującego się w zakresie sprężystym J. Rychlewski [23] sformułował i udowodnił twierdzenie, nazywane w pracy [19] ogólnym twierdzeniem Rychlewskiego.

Dla dowolnego ciała, którego własności sprężyste opisane są tensorem podatności \mathbf{C} (sztywności \mathbf{S}), a własności graniczne tensorem \mathbf{H} istnieje dokładnie jeden energetycznie ortogonalny rozkład przestrzeni S (tensorów symetrycznych drugiego rzędu) $S = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_\kappa$, $\kappa \leq 6$, $H_L \perp H_K$, dla $L \neq K$ i dokładnie jeden zbiór parami różnych stałych $h_1, h_2, \dots, h_\kappa$, $h_\alpha \neq h_\beta$, dla $\alpha \neq \beta$ takich, że dla dowolnego naprężenia $\boldsymbol{\sigma} \in S$, $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2 + \dots + \boldsymbol{\sigma}_\kappa$, $\boldsymbol{\sigma}_\kappa \in H_\kappa$, warunek graniczny $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma} \leq 1$ przyjmie postać:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{h_1} \phi(\boldsymbol{\sigma}_1) + \dots + \frac{1}{h_\kappa} \phi(\boldsymbol{\sigma}_\kappa) \leq 1, \quad (33)$$

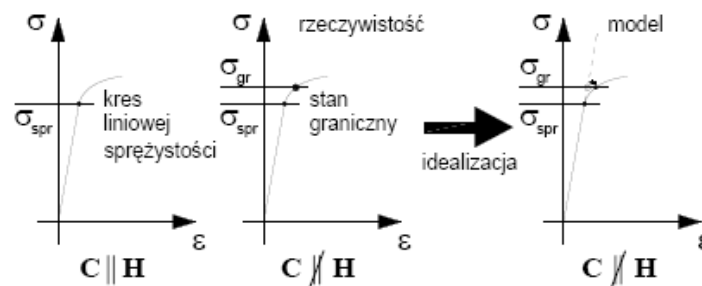
gdzie:

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}_1) + \phi(\boldsymbol{\sigma}_2) + \dots + \phi(\boldsymbol{\sigma}_\kappa) = \phi(\boldsymbol{\sigma});$$

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}_\kappa) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_\kappa \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\sigma}_\kappa = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_\kappa \cdot \boldsymbol{\sigma}_\kappa \text{ (bez sumowania);}$$

h_κ — wagi energii sprężystej nazywane według [19] modułami Rychlewskiego.

Twierdzenie dotyczące energetycznej interpretacji warunku granicznego jest sformułowane dla dowolnych tensorów \mathbf{S} , \mathbf{C} i \mathbf{H} .



Rys. 5. Idealizacja sprężystego stanu granicznego

Źródło: opracowanie własne.

Daje to możliwość rozpatrywania różnych typów symetrii materiału w stanie sprężystym i w stanie granicznym. Aby podać warunek graniczny dla płaskich stanów, który ma charakter energetyczny, wykorzystane jest twierdzenie dotyczące energetycznej interpretacji warunku granicznego.

Twierdzenie dotyczące energetycznej interpretacji warunku granicznego jest sformułowane dla dowolnych tensorów \mathbf{S} , \mathbf{C} i \mathbf{H} . Daje to możliwość rozpatrywania

różnych typów symetrii materiału w stanie sprężystym i w stanie granicznym. Aby podać warunek graniczny dla płaskich stanów, który ma charakter energetyczny, wykorzystane jest twierdzenie dotyczące energetycznej interpretacji warunku granicznego.

Rozpatrywany materiał jest symetryczny zarówno w stanie sprężystym, jak i granicznym. Dla stanów płaskich materiał ma wówczas co najmniej symetrię prostokąta — jest materiałem ortotropowym. Założono, że materiał jest ortotropowy w stanie sprężystym i granicznym o różnych osiach symetrii i różnych dystrybutorach. Założono, że w stanie sprężystym osiami symetrii są kierunki \mathbf{e}_1 i \mathbf{e}_2 na płaszczyźnie fizycznej, a w stanie granicznym osiami symetrii są kierunki \mathbf{h}_1 i \mathbf{h}_2 obrócone względem \mathbf{e}_1 i \mathbf{e}_2 o kąt φ : $\mathbf{h}_1 = \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2$, $\mathbf{h}_2 = -\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2$.

Rozkłady spektralne tensorów \mathbf{C}^p i \mathbf{H}^p mają postać:

$$\mathbf{C}^p = \frac{1}{\lambda_1} \boldsymbol{\omega}_I \otimes \boldsymbol{\omega}_I + \frac{1}{\lambda_2} \boldsymbol{\omega}_{II} \otimes \boldsymbol{\omega}_{II} + \frac{1}{\lambda_3} \boldsymbol{\omega}_{III} \otimes \boldsymbol{\omega}_{III}, \quad (34)$$

$$\mathbf{H}^p = \frac{1}{\chi_1^2} \boldsymbol{\eta}_I \otimes \boldsymbol{\eta}_I + \frac{1}{\chi_2^2} \boldsymbol{\eta}_{II} \otimes \boldsymbol{\eta}_{II} + \frac{1}{\chi_3^2} \boldsymbol{\eta}_{III} \otimes \boldsymbol{\eta}_{III}, \quad (35)$$

gdzie

$\boldsymbol{\omega}_K$ i $\boldsymbol{\eta}_L$ — stany własne tensorów \mathbf{C}^p i \mathbf{H}^p .

W zakresie sprężystym osie symetrii materiału pokrywają się z kierunkami \mathbf{e}_1 i \mathbf{e}_2 , bazę w przestrzeni naprężeń \mathcal{S} stanowią diady

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1).$$

W stanie granicznym osiami symetrii materiału są osie \mathbf{h}_1 i \mathbf{h}_2 na płaszczyźnie fizycznej \mathfrak{e}_2 , w przestrzeni \mathcal{S} bazę będą stanowiły diady

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{h}_1 \otimes \mathbf{h}_1, \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{h}_2 \otimes \mathbf{h}_2, \quad \mathbf{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{h}_1 \otimes \mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_2 \otimes \mathbf{h}_1).$$

Ostatecznie rozkład stanów własnych tensora \mathbf{H}^p w bazie stanów własnych \mathbf{C}^p ma postać [19]:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}_I = & [\cos(\delta - \rho) - \sin(\delta - \frac{\pi}{4}) \sin(\rho - \frac{\pi}{4}) (1 - \cos 2\varphi)] \boldsymbol{\omega}_I + \\ & + [\sin(\delta - \rho) - \sin(\delta - \frac{\pi}{4}) \cos(\rho - \frac{\pi}{4}) (1 - \cos 2\varphi)] \boldsymbol{\omega}_{II} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -[\sin(\delta - \frac{\pi}{2}) \sin 2\varphi \boldsymbol{\omega}_{III}], \\
\boldsymbol{\eta}_{II} &= [-\sin(\delta - \rho) - \cos(\delta - \frac{\pi}{4}) \sin(\rho - \frac{\pi}{4})(1 - \cos 2\varphi)] \boldsymbol{\omega}_I + \\
& + [\cos(\rho - \delta) - \cos(\delta - \frac{\pi}{4}) \cos(\rho - \frac{\pi}{4})(1 - \cos 2\varphi)] \boldsymbol{\omega}_{II} + \\
& - [\cos(\delta - \frac{\pi}{2}) \sin 2\varphi \boldsymbol{\omega}_{III}], \\
\boldsymbol{\eta}_{III} &= \sin 2\varphi [\sin(\rho - \frac{\pi}{4}) \boldsymbol{\omega}_I + \cos(\rho - \frac{\pi}{4}) \boldsymbol{\omega}_{II}] + \cos 2\varphi \boldsymbol{\omega}_{III},
\end{aligned}$$

gdzie:

ρ, δ — dystrybutory sztywności tensora \mathbf{C}^p i \mathbf{H}^p .

Idea postępowania przy wyznaczaniu asymetrycznego energetycznego warunku wyężenia polega na wykorzystaniu badań doświadczalnych uzyskanych z testów w jednoosiowych stanach napężenia. W celu wyznaczenia asymetrycznej powierzchni granicznej dla tej samej symetrii materiału w stanie sprężystym i w stanie granicznym (tensor podatności \mathbf{C} (lub sztywności \mathbf{S}) jest równoległy do tensora granicznego \mathbf{H}), należy przeprowadzić następujące postępowanie:

1. Wyznaczyć tensor podatności \mathbf{C} (lub sztywności \mathbf{S}).
2. Wyznaczyć wartości własne (λ) i osie własne ($\boldsymbol{\omega}$) tensora podatności \mathbf{C} (lub sztywności \mathbf{S}).
3. Wyznaczyć macierz transformacji z układu osi głównych (osi, w których został wykonany eksperyment) do układu osi własnych tensora podatności \mathbf{C} (lub sztywności \mathbf{S}).
4. Transformować wartości naprężeń z eksperymentu wyznaczone w osiach głównych ($\sigma_{gr,r}^1$ — napężenie graniczne dla rozciągania względem pierwszej osi; $\sigma_{gr,r}^2$ — napężenie graniczne dla rozciągania względem drugiej osi; $\sigma_{gr,r}^3$ — napężenie graniczne dla rozciągania względem trzeciej osi; $\sigma_{gr,s}^1$ — napężenie graniczne dla ściskania względem pierwszej osi; $\sigma_{gr,s}^2$ — napężenie graniczne dla ściskania względem drugiej osi; $\sigma_{gr,s}^3$ — napężenie graniczne dla ściskania względem trzeciej osi) do układu osi własnych ($\sigma_{gr,r}^I$ — napężenie graniczne w I stanie

własnym dla rozciągania, $\sigma_{gr,r}^{II}$ — naprężenie graniczne w II stanie własnym dla rozciągania, $\sigma_{gr,r}^{III}$ — naprężenie graniczne w III stanie własnym dla rozciągania, $\sigma_{gr,s}^I$ — naprężenie graniczne w I stanie własnym dla ściskania, $\sigma_{gr,s}^{II}$ — naprężenie graniczne w II stanie własnym dla ściskania, $\sigma_{gr,s}^{III}$ — naprężenie graniczne w III stanie własnym dla ściskania).

5. Podstawić wartości graniczne $\sigma_{gr,r}^I, \sigma_{gr,r}^{II}, \sigma_{gr,r}^{III}, \sigma_{gr,s}^I, \sigma_{gr,s}^{II}, \sigma_{gr,s}^{III}$, do kryterium J. Rychlewskiego w kolejnych częściach układu osi własnych

$$\frac{\Phi(\sigma_r^I)}{\Phi(\sigma_{gr,r}^I)} + \frac{\Phi(\sigma_r^{II})}{\Phi(\sigma_{gr,r}^{II})} + \frac{\Phi(\sigma_r^{III})}{\Phi(\sigma_{gr,r}^{III})} \leq 1 \text{ w części pierwszej;}$$

$$\frac{\Phi(\sigma_s^I)}{\Phi(\sigma_{gr,s}^I)} + \frac{\Phi(\sigma_r^{II})}{\Phi(\sigma_{gr,r}^{II})} + \frac{\Phi(\sigma_r^{III})}{\Phi(\sigma_{gr,r}^{III})} \leq 1 \text{ w części drugiej;}$$

$$\frac{\Phi(\sigma_s^I)}{\Phi(\sigma_{gr,s}^I)} + \frac{\Phi(\sigma_r^{II})}{\Phi(\sigma_{gr,r}^{II})} + \frac{\Phi(\sigma_s^{III})}{\Phi(\sigma_{gr,s}^{III})} \leq 1 \text{ w części trzeciej;}$$

$$\frac{\Phi(\sigma_r^I)}{\Phi(\sigma_{gr,r}^I)} + \frac{\Phi(\sigma_r^{II})}{\Phi(\sigma_{gr,r}^{II})} + \frac{\Phi(\sigma_s^{III})}{\Phi(\sigma_{gr,s}^{III})} \leq 1 \text{ w części czwartej;}$$

$$\frac{\Phi(\sigma_r^I)}{\Phi(\sigma_{gr,r}^I)} + \frac{\Phi(\sigma_s^{II})}{\Phi(\sigma_{gr,s}^{II})} + \frac{\Phi(\sigma_r^{III})}{\Phi(\sigma_{gr,r}^{III})} \leq 1 \text{ w części piątej;}$$

$$\frac{\Phi(\sigma_s^I)}{\Phi(\sigma_{gr,s}^I)} + \frac{\Phi(\sigma_s^{II})}{\Phi(\sigma_{gr,s}^{II})} + \frac{\Phi(\sigma_r^{III})}{\Phi(\sigma_{gr,r}^{III})} \leq 1 \text{ w części szóstej;}$$

$$\frac{\Phi(\sigma_s^I)}{\Phi(\sigma_{gr,s}^I)} + \frac{\Phi(\sigma_s^{II})}{\Phi(\sigma_{gr,s}^{II})} + \frac{\Phi(\sigma_s^{III})}{\Phi(\sigma_{gr,s}^{III})} \leq 1 \text{ w części siódmej;}$$

$$\frac{\Phi(\sigma_r^I)}{\Phi(\sigma_{gr,r}^I)} + \frac{\Phi(\sigma_s^{II})}{\Phi(\sigma_{gr,s}^{II})} + \frac{\Phi(\sigma_s^{III})}{\Phi(\sigma_{gr,s}^{III})} \leq 1 \text{ w części ósmej,}$$

gdzie:

$\sigma = \sigma_{r,s}^I + \sigma_{r,s}^{II} + \sigma_{r,s}^{III}$ — rozkład tensora naprężenia na stany własne;

$\Phi(\sigma_{r,s}^{I,II,III})$ — graniczna wartość gęstości energii sprężystej w kolejnym stanie własnym.

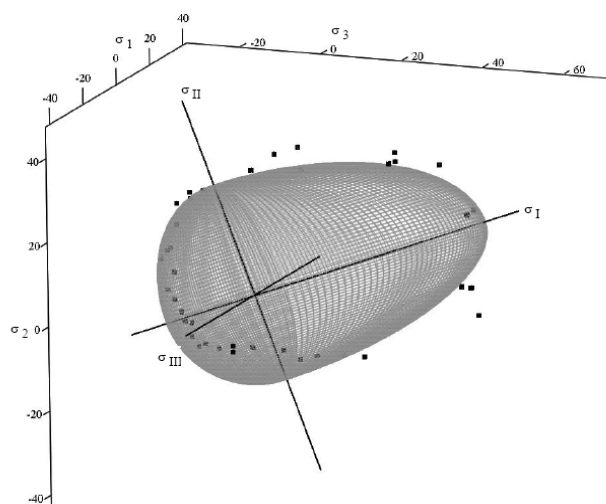
Weryfikacja proponowanego schematu postępowania została wykonana z wykorzystaniem danych doświadczalnych dla kartonu, które zostały podane w pracach [1, 25]:

$$\begin{aligned} E_1 = 3510 \text{ MPa}, \quad E_2 = 3510 \text{ MPa}, \quad E_3 = 6930 \text{ MPa}, \\ \nu_{13} = 0.15, \quad \nu_{23} = 0.15, \quad \nu_{12} = 0.3, \\ G_{23} = 1700 \text{ MPa}, \quad G_{13} = 1700 \text{ MPa}, \quad G_{12} = 1500 \text{ MPa}. \end{aligned}$$

Tensor sztywności przyjmuje postać:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 4220 & 1520 & 1700 & 0 & 0 & 0 \\ 1520 & 4220 & 1700 & 0 & 0 & 0 \\ 1700 & 1700 & 7940 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1700 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1700 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1500 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

Postępując zgodnie z wyżej podanym schematem, otrzymujemy asymetryczną powierzchnię graniczną wpisującą się w punkty otrzymane z doświadczenia.



Rys. 6. Asymetryczna powierzchnia graniczna wyznaczona dla obliczonych naprężeń granicznych w oparciu o energetyczne kryterium J. Rychlewskiego zastosowana do każdej części układu osi własnych
Źródło: opracowanie własne.

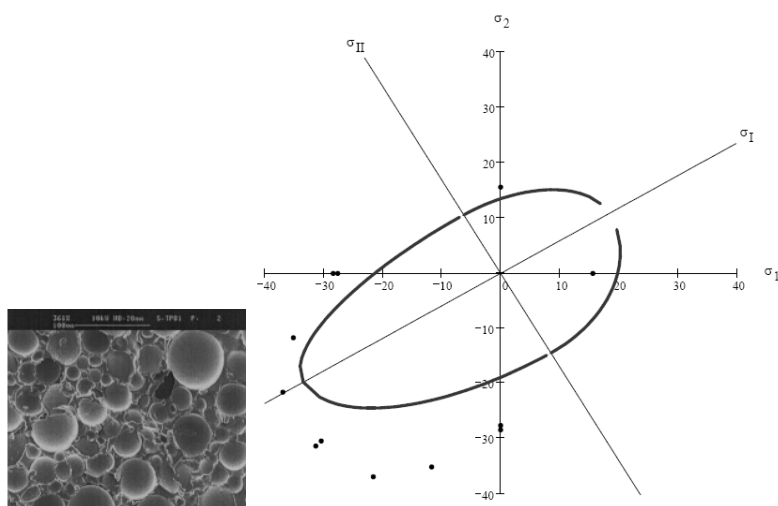
Postępując zgodnie z proponowanym schematem, można również ograniczyć się do płaskich stanów dokładnie diskutowanych i weryfikowanych dla cienkich warstw w pracy [11]. Natomiast w prezentowanym artykule weryfikacja została wykonana z wykorzystaniem danych doświadczalnych dla pianki, które zostały podane w pracy [22]:

$$\begin{aligned} E_1 &= 2200 \text{ MPa}, & E_2 &= 1600 \text{ MPa}, \\ \nu_{12} &= 0.34, \\ G_{12} &= 780 \text{ MPa}. \end{aligned}$$

Tensor sztywności przyjmuje postać:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 2402 & 594 & 0 \\ 594 & 1747 & 0 \\ 0 & 0 & 1560 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

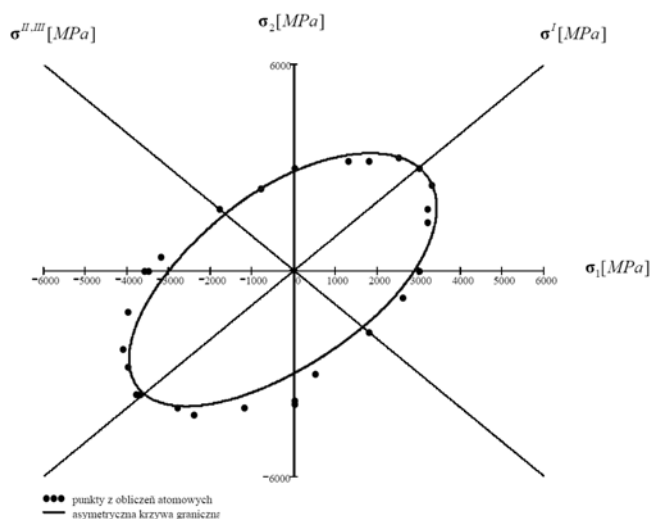
Postępując zgodnie z podanym schematem w pracy [11], otrzymujemy asymetryczną krzywą graniczną wpisującą się w punkty otrzymane z doświadczenia.



Rys. 7. Asymetryczna krzywa graniczna dla pianki wyznaczona dla obliczonych naprężeń granicznych w oparciu o energetyczne kryterium J. Rychlewskiego zastosowana do każdej ćwiartki układu osi własnych

Źródło: opracowanie własne.

Postępując zgodnie z podanym schematem w pracy [11], w pracy tej wyznaczono asymetryczną krzywą graniczną wpisującą się w punkty otrzymane z doświadczenia dla amorficznego metalu [16].



Rys. 8. Asymetryczna krzywa graniczna dla amorficznego metalu

Źródło: opracowanie własne.

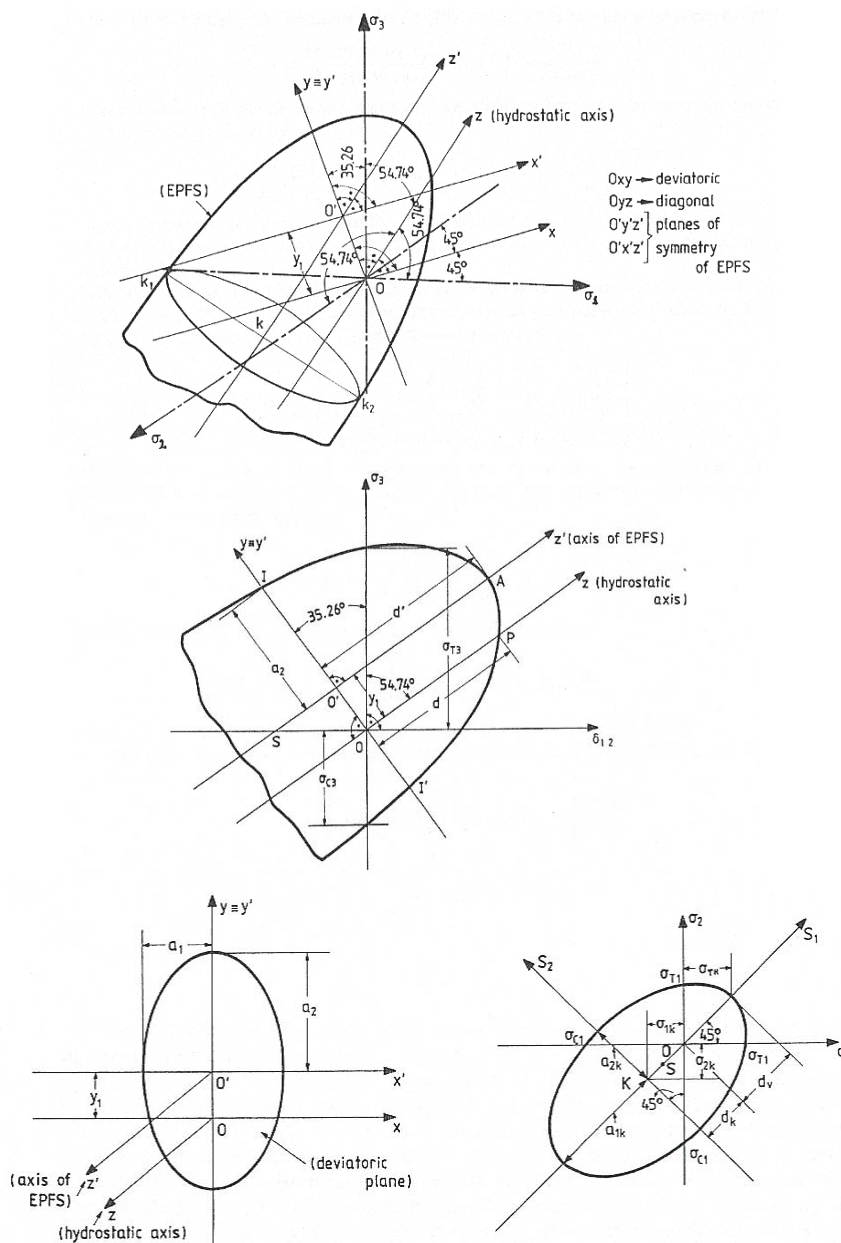
Warto również przytoczyć i porównać krzywe graniczne według J. Rychlewskiego z krzywymi granicznymi otrzymanymi z kryterium P. S. Theocaris [26], które mogłyby posłużyć do uogólnienia kwadratowego kryterium Rychlewskiego dla dowolnych materiałów anizotropowych wykazujących efekt różnicy wytrzymałości (Strength Differential Effect):

$$\frac{\sigma_{ii}^2}{\sigma_{Ti} \sigma_{Ci}} - \left(\frac{1}{\sigma_{Ti} \sigma_{Ci}} + \frac{1}{\sigma_{T(i+1)} \sigma_{C(i+1)}} - \frac{1}{\sigma_{T(i+2)} \sigma_{C(i+2)}} \right) \sigma_i \sigma_{(i+1)} + \left(\frac{1}{\sigma_{Ti}} - \frac{1}{\sigma_{Ci}} \right) \sigma_{ij} = 1 \quad (36)$$

$$\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_{T1} \sigma_{C1}} + \frac{\sigma_3^2}{\sigma_{T3} \sigma_{C3}} - \left(\frac{2}{\sigma_{T1} \sigma_{C1}} - \frac{1}{\sigma_{T3} \sigma_{C3}} \right) \sigma_1 \sigma_2 - \frac{\sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1}{\sigma_{T3} \sigma_{C3}} + \left(\frac{1}{\sigma_{T1}} - \frac{1}{\sigma_{C1}} \right) (\sigma_1 + \sigma_3) + \left(\frac{1}{\sigma_{T3}} - \frac{1}{\sigma_{C3}} \right) \sigma_3 = 1, \quad (37)$$

gdzie

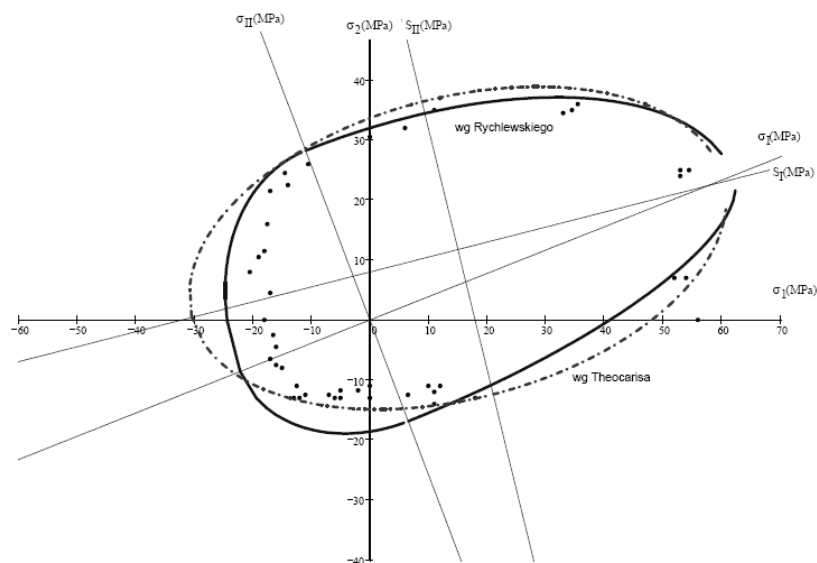
σ_{Ti}, σ_{Ci} — odpowiednio napężenie graniczne przy rozciąganiu i ściskaniu w kierunku głównym $i = 1, 2, 3$.



Rys. 9. Interpretacja graficzna kryterium P. S. Theocarisa

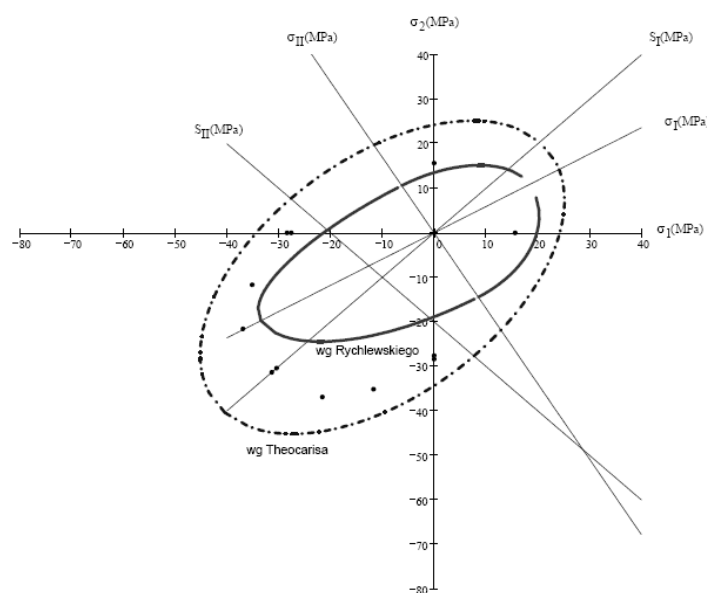
Źródło: P. S. Theocaris, *The elliptic paraboloid failure surface for 2D-transotropic plates (fiber laminates)*, 'Engineering Fracture Mechanics', 1989, Vol. 33.

Wykorzystując podane algorytmy oraz dane doświadczalne prezentowane w [26, 27, 28], wyznaczono następujące krzywe graniczne:



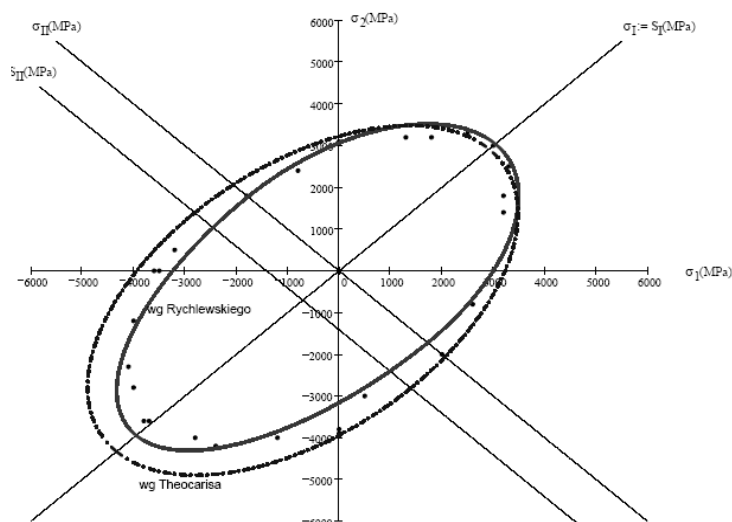
Rys. 10. Krzywe graniczne dla kartonu wyznaczone dla obliczonych naprężeń granicznych w oparciu o energetyczne kryterium J. Rychlewskiego zastosowane do każdej ćwiartki układu osi własnych oraz według P. S. Theocarisa

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 11. Krzywe graniczne dla pianki wyznaczone dla obliczonych naprężeń granicznych w oparciu o energetyczne kryterium J. Rychlewskiego zastosowane do każdej ćwiartki układu osi własnych oraz według P. S. Theocarisa

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 12. Krzywe graniczne dla amorficznego metalu wyznaczone dla obliczonych naprężeń granicznych w oparciu o energetyczne kryterium J. Rychlewskiego zastosowane do każdej ćwiartki układu osi własnych oraz według P. S. Theocarisa

Źródło: opracowanie własne.

WNIOSKI

Prezentowane podejście daje możliwość zastosowania energetycznego kryterium J. Rychlewskiego [23, 24] do oceny wytyczenia materiałów, które cechuje różnica własności wytrzymałościowych, a zatem i asymetrii zakresu sprężystego. Przedstawiona interpretacja graficzna asymetrycznego warunku energetycznego w układzie osi własnych (w przestrzeni stanów własnych) wykazuje, że w każdej części tego układu wyznaczona jest inna powierzchnia graniczna, odpowiadająca własnościom materiału określonym na drodze doświadczenia w układzie osi głównych (w przestrzeni naprężeń głównych). Takie podejście do analizy energetycznego kryterium wytyczenia J. Rychlewskiego pozwala na wykorzystanie jednoosiowych testów doświadczalnych do określenia wytyczenia materiału oraz daje również podstawę do wyznaczenia modułów Rychlewskiego h_{κ} , a więc tensora stanu granicznego \mathbf{H} . Widoczne na rysunkach 6. i 7. rozbieżności między wyznaczonym teoretycznym obszarem granicznym a punktami doświadczalnymi można będzie prawdopodobnie zmniejszyć, jeżeli zastosujemy ogólne twierdzenie Rychlewskiego, które dopuszcza różne symetrie tensora podatności \mathbf{C} (sztywności \mathbf{S}) oraz tensora wytyczenia \mathbf{H} .

BIBLIOGRAFIA

- [1] Biegler M. W., Mehrabadi M. M., *An energy-based constitutive model for anisotropic solids subject to damage*, 'Mechanics of Materials', 1995, Vol. 19, pp. 151-164.
- [2] Burzyński W., *Studium nad hipotezami wyężenia*, Nakładem Akademii Nauk Technicznych, Lwów 1928; *Dzieła wybrane*, PWN, Warszawa 1982, t. 1, s. 68–257.
- [3] Burzyński W., *Teoretyczne podstawy hipotez wyężenia*, „Czasopismo Techniczne”, 1929, t. 47, s. 1–41, Lwów; *Dzieła wybrane*, PWN, Warszawa 1982, t. 1, s. 265–303; angielskie wydanie: *Theoretical foundations of the hypotheses of material effort*, 'Engineering Transactions', 2008, Vol. 56, pp. 269–305.
- [4] Huber M. T., *Właściwa praca odkształcenia jako miara wyężenia materiału*, „Czasopismo Techniczne XXII”, Lwów 1904.
- [5] Janus-Michalska M., Kordzikowski P., Pęcherski R. B., *Energy-based approach to limit state criteria of cellular materials*, International Symposium on Developments in Plasticsity and Fracture-Centenary of M. T. Huber Criterion, Kraków 2004.
- [6] Janus-Michalska M., Pęcherski R. B., *Macroscopic properties of open-cell foams based on micromechanical modelling*, 'Technische Mechanik', 2003, Vol. 23, pp. 234–244.
- [7] Janus-Michalska M., *Effective models describing elastic behaviour of cellular materials*, 'Archives of Metallurgy and Materials', 3/2005, Vol. 50, pp. 595–608.
- [8] Kordzikowski P., Janus-Michalska M., Pęcherski R. B., *Analiza wpływu wytrzymałości prętów sześcienniej struktury komórkowej na rozkład granicznych energii*, „Rudy i Metale Nieżelazne”, 2004, R. 49, nr 3, s. 114–120.
- [9] Kordzikowski P., Janus-Michalska M., Pęcherski R. B., *Specification of energy-based criterion of elastic limit states for cellular materials*, 'Archives of Metallurgy and Materials', 3/2005, Vol. 50, pp. 621–634.
- [10] Kordzikowski P., *Podstawy teorii wyężenia materiałów komórkowych w oparciu o energetyczne kryteria stanów granicznych*, praca doktorska, Politechnika Krakowska, Kraków 2006.
- [11] Kordzikowski P., *Zastosowanie energetycznego kryterium Rychlewskiego do oceny wyężenia anizotropowych cienkich warstw wykazujących efekt różnicy wytrzymałości*, „Rudy i Metale Nieżelazne”, 2007, R. 52, nr 11, s. 689–695.
- [12] Kordzikowski P., *Zastosowanie energetycznego kryterium Rychlewskiego do oceny wyężenia anizotropowych materiałów wykazujących efekt różnicy wytrzymałości*, „Czasopismo Techniczne — seria: Mechanika”, 3-M/2010, z. 9, R. 107, s. 65–74.

- [13] Kordzikowski P., Pęcherski R. B., *Assessment of the material strength of anisotropic materials with asymmetry of the elastic range*, 'Mechanics and Control' (dawne 'Mechanics'), 2010, Vol. 29, No 2, pp. 57–62.
- [14] Kowalczyk K., Ostrowska-Maciejewska J., Pęcherski R. B., *An-energy based yield criterion for solids of cubic elasticity and orthotropic limit state*, „Arch. Mech.”, 2003, t. 55, s. 431–448.
- [15] Kowalczyk-Gajewska K., Ostrowska-Maciejewska J., *Energy-based limit criteria for anisotropic elastic materials with constraints*, „Arch. Mech.”, 2005, t. 57.
- [16] Lund A. C., Schuh C. A., *Strength asymmetry in nano-crystalline metals under multiaxial loading*, 'Acta Materialia', 2005, Vol. 53, pp. 3193–3205.
- [17] Nalepka K., Pęcherski R. B., *Fizyczne podstawy energetycznego kryterium wyteżenia monokryształów*, red. J. Pacyno, XXX Szkoła Inżynierii Materiałowej, Kraków — Ustroń — Jaszowiec, 1–4 X 2002, AGH, Kraków 2002, s. 311–316.
- [18] Nalepka K., Pęcherski R. B., *Energetyczne kryteria wyteżenia. Propozycja obliczania granicznych energii z pierwszych zasad*, „Rudy i Metale Nieżelazne”, 2003, R. 48, s. 533–536.
- [19] Ostrowska-Maciejewska J., Pęcherski R. B., *Anizotropia sprężysta i wyteżenie cienkich warstw i powłok*, PAN, Kraków 2006.
- [20] Piechnik S., *Mechanika techniczna ciała stałego*, Politechnika Krakowska, Kraków 2007.
- [21] Porębski K., *Specyfikacja kryterium wyteżenia warstw kompozytowych z zastosowaniem wielomodalnych energetycznych warunków dla sprężystych stanów granicznych*, Politechnika Krakowska, Kraków 2007.
- [22] Rizzi E., Papa E., Corigliano A., *Mechanical behavior of a syntectic foam — experiments and modeling*, 'International Journal of Solids and Structures', 2000, Vol. 37, pp. 5773–5794.
- [23] Rychlewski J., *Elastic energy decomposition and limit criteria*, 'Uspekhi Mekh. — Advances in Mech.', 1984, Vol. 7, pp. 51–80 (po rosyjsku).
- [24] Rychlewski J., *Unconventional approach to linear elasticity*, „Arch. Mech.”, 1995, t. 47, s. 149–171.
- [25] Suhling J. C., Rowlands R. E., Johnson M. W., Gunderson D. E.: *Tensorial Strength Analysis of Paperboard*, „Exp. Mech.”, 1985, t. 25, s. 75–84.
- [26] Theocaris P. S., *The elliptic paraboloid failure surface for 2D-anisotropic plates (fiber laminates)*, 'Engineering Fracture Mechanics', 1989, Vol. 33, pp. 185–203.
- [27] Theocaris P. S., *Failure Behaviour of Paper Sheets*, 'Journal of Reinforced Plastics and Composites', 1989, Vol. 8, pp. 601–626.

- [28] Theocaris P. S., *Decomposition of strain energy density in fiber reinforced composites*, 'Engineering Fracture Mechanics', 1989, Vol. 33, No. 3, pp. 335–343.
- [29] Walczak J., *Wytrzymałość materiałów oraz podstawy teorii sprężystości i plastyczności*, t. 2, PWN, Warszawa 1973.

EFFORT OF SELECTED ANISOTROPIC MATERIALS WITH SCOPE ELASTIC ASYMMETRY

ABSTRACT

The paper contains a discussion concerned with the E. Beltrami, M. T. Huber and W. Burzyński energy-based criteria for isotropic bodies as well as the J. Rychlewski limit criterion for anisotropic materials. It also refers to the P. S. Theocaris failure criterion mentioned in the discussion focused on the possibility of extending the criterion proposed by Rychlewski to anisotropic materials displaying asymmetry of elastic range and the related strength differential effect.

Keywords:

anisotropic materials, effort criterion, own elasticity states.