ZESZYTY NAUKOWE AKADEMII MARYNARKI WOJENNEJ
ROK LII NR 2 (185) 2011

Janusz Kolenda
Akademia Marynarki Wojennej

DWA KRYTERIA NIEOGRANICZONEJ TRWAŁOŚCI ZMĘCZENIOWEJ PRZY OBCIĄŻENIACH OKRESOWYCH

STRESZCZENIE

Praca dotyczy bezpieczeństwa zmęczeniowego maszyn i konstrukcji obciążonych poniżej granicy zmęczenia. Rozpatrywany jest złożony stan naprężenia, którego składowe są zadane w postaci szeregów Fouriera. W celu sformułowania kryterium nieograniczonej trwałości zmęczeniowej naprężenie to zamodelowano naprężeniem zredukowanym, równoważnym naprężeniu oryginalnemu w odniesieniu do wytrzymałości zmęczeniowej. Warunki równoważności oparto na hipotezie uśrednionej energii odkształcenia postaciowego. Porównano dwa rozwiązania tego zagadnienia.

Słowa kluczowe:
złożony stan naprężenia, naprężenie zredukowane, kryteria zmęczenia.

WSTĘP

Obciążenia maszyn i konstrukcji mają często dynamiczny charakter. Odpowiadające im zmienne naprężenia wywołują w materiale złożony splot zjawisk i zmian zależnych od wartości tych naprężeń i liczby cykli. Są to zjawiska i zmiany zmęczeniowe, które sukcesywnie się rozwijając, mogą doprowadzić do pękania nawet dużych konstrukcji [9, 7, 11]. Jedynie naprężenie o amplitudzie leżącej poniżej granicy zmęczenia zapewnia w odpowiednich warunkach teoretycznie nieograniczoną trwałość zmęczeniową [4].

Granica zmęczenia dla danego materiału zależy od rodzaju obciążenia. Szczególnie dla stali węglowych i stopowych, normalizowanych lub cieplnie ulepszonych, granice zmęczenia dla wahadłowego zginania, rozciągania-ściskania i skręcania wynoszą [4]:

$$Z_{go} = 0{,}45R_m\,, \quad Z_{rc} = 0{,}33R_m\,, \quad Z_{so} = 0{,}25R_m\,,$$

gdzie
R_m — wytrzymałość na rozciąganie.

Niższa odporność materiału na zmienne naprężenie tnące niż na zmienne naprężenie normalne ma ścisły związek z energią odkształcenia postaciowego przy tego typu obciążeniach, która legła u podstaw hipotezy Hubera-Misesa-Hencky'ego [3]. Zgodnie z tą hipotezą wytężenie materiału w złożonym stanie statycznego naprężenia o składowych $\sigma_i \left(i = x, y, z, xy, yz, zx\right)$ jest równoważne wytężeniu materiału poddanego naprężeniu o jednej składowej normalnej

$$\sigma_{red} = \left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x + 3\left(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2\right)\right]^{1/2} \tag{1}$$

zwanej naprężeniem zredukowanym, zastępczym lub ekwiwalentnym.

KRYTERIUM NIEOGRANICZONEJ TRWAŁOŚCI ZMĘCZENIOWEJ

W odniesieniu do zmęczenia uważa się, że jedynie zgodne w fazie składowe naprężenia o zerowych wartościach średnich i stałych kierunkach głównych mogą być analizowane za pomocą konwencjonalnych hipotez wytężenia [10], choć nie wyklucza się przydatności kryteriów opartych na uśrednionej energii odkształcenia [8]. Koncepcje te wykorzystano między innymi w pracach [5, 6], gdzie dla złożonego naprężenia o składowych

$$\sigma_i(t) = \sigma_{mi} + \sum_{p=1}^{n} \sigma_{pi} \sin\left(p\omega_0 t + \alpha_{pi}\right) \tag{2}$$

wyznaczono naprężenie zredukowane

$$\tilde{\sigma}_a(t) = \sigma_m + \sigma_a \sin \omega_a t\,, \tag{3}$$

gdzie:

σ_a, ω_a — amplituda i częstość naprężenia zredukowanego;

σ_m — średnie naprężenie zredukowane;

σ_{mi} — średnia wartość i-tej składowej;

σ_{pi}, α_{pi} — amplituda i faza p-tej harmonicznej i-tej składowej;

n — liczba uwzględnianych harmonicznych szeregu Fouriera, na jaki rozłożono i-tą składową;

$\omega_0 = 2\pi / T_0$ — częstość podstawowa naprężenia złożonego;

T_0 — okres zmienności naprężenia złożonego.

Pozwoliło to sformułować kryterium nieograniczonej trwałości zmęczeniowej materiałów sprężysto-plastycznych w postaci

$$\sigma_a < Z_{rc}\left(1 - \sigma_m / R_e\right), \tag{4}$$

gdzie:

R_e — granica plastyczności materiału;

Z_{rc} — granica zmęczenia materiału przy wahadłowym rozciąganiu-ściskaniu.

$$\sigma_a = \left(\sum_{p=1}^{n} \sigma_{pa}^2\right)^{1/2}; \tag{5}$$

$$\sigma_m = \left(\sigma_{mx}^2 + \sigma_{my}^2 - \sigma_{mx}\sigma_{my} + 3\sigma_{mxy}^2\right)^{1/2}; \tag{6}$$

$$\sigma_{pa} = \left[\sigma_{px}^2 + \sigma_{py}^2 - \sigma_{px}\sigma_{py}\cos\left(\alpha_{px} - \alpha_{py}\right) + 3\sigma_{pxy}^2\right]^{1/2}. \tag{7}$$

Dla uproszczenia zapisu w wyrażeniach (6) i (7) oraz w dalszej części pracy pominięto wielkości odnoszące się do składowych $\sigma_z(t)$, $\sigma_{yz}(t)$ i $\sigma_{zx}(t)$.

Wyrażenia (5)–(7) są wynikiem dwuetapowej redukcji złożonego naprężenia o składowych (2) do naprężenia zastępczego (3). W pierwszym etapie wyznaczono naprężenie ekwiwalentne o jednej składowej

$$\sigma_a^{'} = \sigma_m + \sum_{p=1}^{n} \sigma_{pa} \sin p\omega_0 t, \tag{8}$$

które w drugim etapie zredukowano do postaci (3).

W wyrażeniach (4)–(7) nie występuje częstość naprężenia, dlatego w niniejszym artykule pominięto zagadnienie wyznaczania częstości kołowej ω_a naprężenia zredukowanego (co przedstawiono m.in. w pracy [5]).

ALTERNATYWNY SPOSÓB WYZNACZENIA NAPRĘŻENIA ZREDUKOWANEGO

Charakterystyczne dla pierwszego etapu zaproponowanego w [5, 6] sposobu redukcji złożonego naprężenia okresowego o składowych (2) jest zastąpienie go naprężeniem o jednej składowej (8). W odróżnieniu od takiego podejścia, w niniejszym artykule zakłada się, że w pierwszym etapie redukcji nastąpi zastąpienie złożonego naprężenia o składowych (2) złożonym naprężeniem o harmonicznych składowych

$$\sigma_i^{'}(t) = \sigma_{mi} + \sigma_{bi} \sin \omega_{bi} t \,, \tag{9}$$

które w drugim etapie zostanie zredukowane do naprężenia

$$\tilde{\sigma}_b(t) = \sigma_{mb} + \sigma_b \sin \omega_b t \,. \tag{10}$$

Wykorzystując hipotezę uśrednionej energii odkształcenia postaciowego, w pierwszym etapie mamy równanie [5]

$$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \phi_i^{'}(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \phi_i(t)dt \,, \tag{11}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \phi_i^{'}(t) &= \frac{1+\upsilon}{3E}\left[\sigma_i^{'}(t)\right]^2 \\ \phi_i(t) &= \frac{1+\upsilon}{3E}\left[\sigma_i(t)\right]^2 \end{aligned} \,, \tag{12}$$

to energie odkształcenia postaciowego wywołane *i*-tą składową (9) oraz *i*-tą składową (2). W wyrażeniach (12) E oznacza moduł Younga, natomiast ν współczynnik Poissona.

Przyjmując uproszczenie, że częstości ω_{bi} w (9) są krotnościami częstości podstawowej ω_o

$$\omega_{bi} = k_i \omega_0 , \tag{13}$$

gdzie

$$k_i = \mathrm{Round}\left(\chi_i\right) \tag{14}$$

jest liczbą naturalną wyznaczaną poprzez zaokrąglenie liczby χ_i określonej wzorem

$$\chi_i = \left[\frac{\sum_{p=1}^{n} \left(p\sigma_{pi}\right)^2}{\sum_{p=1}^{n} \sigma_{pi}^2} \right]^{1/2} , \tag{15}$$

otrzymuje się z (11)

$$\sigma_{bi} = \left(\sum_{p=1}^{n} \sigma_{pi}^2 \right)^{1/2} . \tag{16}$$

Wzór (15) otrzymano w [5] na podstawie teorii systemów transformacji energii [2] przy założeniu, że tłumienie materiałowe odpowiada modelowi Kelvina--Voigta [1].

W drugim etapie należy zastąpić składowe

$$\begin{aligned} \sigma_x^{'}(t) &= \sigma_{mx} + \sigma_{bx} \sin \omega_{bx} t \\ \sigma_y^{'}(t) &= \sigma_{my} + \sigma_{by} \sin \omega_{by} t \\ \sigma_{xy}^{'}(t) &= \sigma_{mxy} + \sigma_{bxy} \sin \omega_{bxy} t \end{aligned} \tag{17}$$

naprężeniem (10). W tym celu ponownie zastosujemy hipotezę uśrednionej energii odkształcenia postaciowego

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \phi_b(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \phi'(t) dt , \tag{18}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \phi_b(t) &= \frac{1+\upsilon}{3E}\left[\tilde{\sigma}_b(t)\right]^2 \\ \phi'(t) &= \frac{1+\upsilon}{3E}\left\{\left[\sigma_x'(t)\right]^2 + \left[\sigma_y'(t)\right]^2 - \sigma_x'(t)\sigma_y'(t) + 3\left[\sigma_{xy}'(t)\right]^2\right\} \end{aligned} . \tag{19}$$

Z zależności (10) i (17)–(19) otrzymuje się:

$$\sigma_{mb} = \left(\sigma_{mx}^2 + \sigma_{my}^2 - \sigma_{mx}\sigma_{my} + 3\sigma_{mxy}^2\right)^{1/2} = \sigma_m ; \tag{20}$$

$$\sigma_b = \left(\sigma_{bx}^2 + \sigma_{by}^2 - \frac{2}{T_0}\sigma_{bx}\sigma_{by}\int_0^{T_0} \sin\omega_{bx}t \sin\omega_{by}t\, dt + 3\sigma_{bxy}^2\right)^{1/2} . \tag{21}$$

W ogólnym przypadku liczby

$$\chi_x = \left[\frac{\sum_{p=1}^{n}\left(p\sigma_{px}\right)^2}{\sum_{p=1}^{n}\sigma_{px}^2}\right]^{1/2} , \quad \chi_y = \left[\frac{\sum_{p=1}^{n}\left(p\sigma_{py}\right)^2}{\sum_{p=1}^{n}\sigma_{py}^2}\right]^{1/2} \tag{22}$$

mogą różnić się na tyle, że otrzymane po ich zaokrągleniu liczby naturalne k_x i k_y też są różne. Wówczas

$$\omega_{bx} = k_x\omega_0 \neq \omega_{by} = k_y\omega_0 \tag{23}$$

i wyrażenie (21) przyjmuje postać

$$\sigma_b = \left(\sigma_{bx}^2 + \sigma_{by}^2 + 3\sigma_{bxy}^2\right)^{1/2} . \tag{24}$$

PRZYKŁAD

Wyznaczyć naprężenie średnie oraz amplitudy σ_a i σ_b naprężeń zredukowanych (3) i (10), jeśli aktualny stan naprężenia ma składowe

$$\begin{aligned}
\sigma_x(t) &= \sigma_{mx} + \sigma_{1x}\sin(\omega_0 t + \alpha_{1x}) + \sigma_{2x}\sin(2\omega_0 t + \alpha_{2x}) \\
\sigma_y(t) &= \sigma_{my} + \sigma_{1y}\sin(\omega_0 t + \alpha_{1y}) + \sigma_{2y}\sin(2\omega_0 t + \alpha_{2y}) \\
\sigma_{xy}(t) &= \sigma_{mxy} + \sigma_{1xy}\sin(\omega_0 t + \alpha_{1xy}) + \sigma_{2xy}\sin(2\omega_0 t + \alpha_{2xy})
\end{aligned} .$$

R o z w i ą z a n i e

Zależności (6) i (20) pozwalają stwierdzić, że naprężenie średnie naprężeń zredukowanych $\tilde{\sigma}_a(t)$ i $\tilde{\sigma}_b(t)$ jest takie samo i wynosi

$$\sigma_m = \sigma_{mb} = \left(\sigma_{mx}^2 + \sigma_{my}^2 - \sigma_{mx}\sigma_{my} + 3\sigma_{mxy}^2\right)^{1/2} . \tag{25}$$

Różnią się natomiast amplitudy tych naprężeń, gdyż zgodnie z (5) i (7)

$$\begin{aligned}
\sigma_a = \Big[&\sigma_{1x}^2 + \sigma_{1y}^2 - \sigma_{1x}\sigma_{1y}\cos(\alpha_{1x} - \alpha_{1y}) + \sigma_{2x}^2 + \sigma_{2y}^2 - \\
&- \sigma_{2x}\sigma_{2y}\cos(\alpha_{2x} - \alpha_{2y}) + 3\left(\sigma_{1xy}^2 + \sigma_{2xy}^2\right)\Big]^{1/2}
\end{aligned} \tag{26}$$

oraz zgodnie z (16) i (24)

$$\sigma_b = \left[\sigma_{1x}^2 + \sigma_{2x}^2 + \sigma_{1y}^2 + \sigma_{2y}^2 + 3\left(\sigma_{1xy}^2 + \sigma_{2xy}^2\right)\right]^{1/2} . \tag{27}$$

Przykładowo, jeśli

$$Z_{rc} = 210MPa\,, \quad R_e = 360MPa \qquad (stal\ 45)$$

oraz

$$\begin{aligned}
&\sigma_{mx} = 120MPa\ , \quad \sigma_{my} = 0\ , \quad \sigma_{mxy} = 0\ , \quad \sigma_{xy} = 0 \\
&\sigma_{1x} = 30MPa\ , \quad \alpha_{1x} = 80^0\ , \quad \sigma_{2x} = 20MPa\ , \quad \alpha_{2x} = 20^0\ , \\
&\sigma_{1y} = 40MPa\ , \quad \alpha_{1y} = 70^0\ , \quad \sigma_{2y} = 25MPa\ , \quad \alpha_{2y} = 10^0
\end{aligned}$$

to

$$\begin{aligned}
&\sigma_m = 120MPa \\
&\sigma_a = \left[30^2 + 40^2 - 30\cdot 40\cos(80^0 - 20^0) + 20^2 + 25^2 - 20\cdot 25\cos(70^0 - 10^0)\right]^{1/2} = 51{,}72MPa. \\
&\sigma_b = \left(30^2 + 20^2 + 40^2 + 25^2\right)^{1/2} = 59{,}37MPa
\end{aligned}$$

W odniesieniu do wartości wyrażenia

$$Z_{rc}\left(1-\sigma_m / R_e\right)=210\left(1-120/360\right)=140MPa$$

w nierówności (4), wartość σ_a stanowi 37%, a wartość σ_b — 42%.

UWAGI KOŃCOWE

Jak wynika ze wzorów (5), (7) i (26), amplituda naprężenia zredukowanego $\tilde{\sigma}_a(t)$ zależy w istotnym stopniu od kątów fazowych poszczególnych składowych złożonego naprężenia (2), zmieniając się w granicach

$$\left(\sigma_a\right)_{\min} \le \sigma_a \le \left(\sigma_a\right)_{\max}, \tag{28}$$

gdzie:

$$\left(\sigma_a\right)_{\min} = \left[\sum_{p=1}^{n}\left(\sigma_{px}^2+\sigma_{py}^2-\sigma_{px}\sigma_{py}+3\sigma_{pxy}^2\right)\right]^{1/2}; \tag{29}$$

$$\left(\sigma_a\right)_{\max} = \left[\sum_{p=1}^{n}\left(\sigma_{px}^2+\sigma_{py}^2+3\sigma_{pxy}^2\right)\right]^{1/2}. \tag{30}$$

Na podstawie wzorów (16), (24), (27) i (30) łatwo stwierdzić, że

$$\left(\sigma_a\right)_{\max} = \sigma_b. \tag{31}$$

Oznacza to, że spełnienie kryterium nieograniczonej trwałości zmęczeniowej wynikającego z przyjęcia naprężenia zredukowanego w postaci (10)

$$\sigma_b < Z_{rc}\left(1-\sigma_m / R_e\right) \tag{32}$$

gwarantuje wyższy poziom bezpieczeństwa zmęczeniowego niż spełnienie kryterium (4).

BIBLIOGRAFIA

[1] Awrejcewicz J., Krysko W. A., *Drgania układów ciągłych*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2000.

[2] Cempel C., *Theory of energy transformation systems and their application in diagnostics of operating systems*, 'Applied Math. and Computer Sciences', 1993, 2.

[3] Dyląg Z., Orłoś Z., Jakubowicz A., *Wytrzymałość materiałów*, t. 1 i 2, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1996.

[4] Kocańda S., Szala J., *Podstawy obliczeń zmęczeniowych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1997.

[5] Kolenda J., *On fatigue safety of metallic elements under static and dynamic loads,* Politechnika Gdańska, Gdańsk 2004.

[6] Kolenda J., *O wyznaczaniu warstwic bezpieczeństwa zmęczeniowego elementów przy obciążeniach okresowych*, „Zeszyty Naukowe" AMW, 2009, nr 3.

[7] Kozak J., *Problemy oceny wybranych własności wytrzymałościowych stalowych dwupowłokowych struktur okrętowych*, Politechnika Gdańska, Gdańsk 2005.

[8] Palin-Luc T., Lasserre S., *High cycle multiaxial fatigue energetic criterion taking into account the volumic distribution of stresses*, Proc. of 5th Int. Conf. on Biaxial/Multiaxial Fatigue and Fracture, Opole 1997, Vol. 1.

[9] Rosochowicz K., *Problemy pękania zmęczeniowego kadłubów statków*, Okrętownictwo i Żegluga, Gdańsk 2000.

[10] Sonsino C. M., *Multiaxial fatigue of welded joints under in-phase and out-of--phase local strains and stresses*, 'Int. J. Fatigue', 1995, 1.

[11] Yanaka Y., Kitagawa M., *Maintenance of steel bridges on Honshu — Shikoku crossing*, 'J. Constr. Steel Research', 2002, Vol. 58, 1.

TWO CRITERIA OF INFINITE FATIGUE LIFE UNDER PERIODIC LOADS

ABSTRACT

The paper deals with the fatigue safety of machines and structures loaded below the fatigue limit. Combined periodic stress is considered the components of which are given in the form of Fourier series. In order to formulate a criterion of an infinite fatigue life, a reduced stress is determined which is equivalent to the original stress in terms of fatigue strength. The equivalence

conditions are based on the average-distortion-energy strength hypothesis. Two solutions of this problem are compared.

Keywords:
combined stress, reduced stress, fatigue criteria.

Recenzent dr hab. inż. Janusz Kozak