ZESZYTY NAUKOWE AKADEMII MARYNARKI WOJENNEJ
ROK XLVIII NR 1 (168) 2007

Janusz Kolenda
Akademia Marynarki Wojennej

ENERGIA DYSYPACJI W SPRĘŻYSTOLEPKIM PRĘCIE PRZY HARMONICZNYCH OBCIĄŻENIACH

STRESZCZENIE

W pracy przedstawiono zależności określające gęstość energii rozpraszanej w zadanym czasie w sprężystolepkim pręcie przy jego harmonicznym rozciąganiu-ściskaniu i skręcaniu, z uwzględnieniem udziału odkształceń objętościowych i postaciowych. Wyliczono również całkowitą ilość energii rozproszonej w określonym czasie, z zaznaczeniem dominującej roli warstw zewnętrznych pręta przy jego skręcaniu.

Słowa kluczowe:
ciało sprężystolepkie, obciążenia harmoniczne, energia dysypacji.

WSTĘP

Przy deformacji materiałów konstrukcyjnych zachodzi rozpraszanie energii wywołane tarciem wewnętrznym. Zjawisko to jest złożone, a jego ścisły opis matematyczny nie jest znany. Dla zbadania wpływu rozpraszania energii na zachowanie się układu mechanicznego najczęściej przyjmuje się, że tarcie wewnętrzne ma cechy oporu lepkiego [1, 5]. Przy odkształceniu rozciąganego elementu liniowego ciała sprężystolepkiego występuje naprężenie sprężyste:

$$\sigma_s = E\varepsilon \,, \tag{1}$$

gdzie: E – moduł sprężystości podłużnej;
ε – wydłużenie właściwe elementu.

Oprócz niego występuje naprężenie, które jest proporcjonalne do prędkości odkształcenia:

$$\sigma_t = \eta \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \tag{2}$$

gdzie η – współczynnik oporu lepkiego.

Naprężenie w dowolnym przekroju jest równe sumie tych naprężeń:

$$\sigma = E\varepsilon + \eta \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}. \tag{3}$$

Wzór ten określa równanie stanu ciała sprężystolepkiego zgodnie z modelem Kelvina-Voigta.

Przy deformacjach skrętnych przyjmuje się analogicznie, że naprężenie styczne w dowolnym przekroju wynosi [1, 5]:

$$\tau = G\gamma + \lambda \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \tag{4}$$

gdzie: G – moduł sprężystości postaciowej;
γ – odkształcenie poprzeczne właściwe elementu;
λ – współczynnik oporu lepkiego przy ścinaniu.

Zachodzi przy tym relacja [4]:

$$\frac{\eta}{\lambda} = \frac{E}{G} = 2(1+\nu), \tag{5}$$

gdzie ν – współczynnik Poissona.

Powyższe zależności pozwalają określić gęstość energii dysypacji (czyli ilość rozproszonej energii przypadającą na jednostkę objętości deformowanego ciała) w zadanym odstępie czasu Δt, $\varphi(\Delta t)$ [3]. Pomijając wpływ mikropoślizgów na granicach ziaren materiału, mikropęknięć, magnetostrykcji i innych niesprężystych zjawisk, przyjmuje się, że energia rozpraszana w materiale zamienia się na energię cieplną. Prowadzi to do wzrostu temperatury deformowanej jednostki objętości materiału, a także do przewodzenia energii cieplnej do sąsiednich jednostek objętości o niższej temperaturze i wypromieniowywania jej na zewnątrz.

Dla deformowanych w dłuższym czasie ciał sprężystolepkich ich przyrost temperatury może być godny uwagi, dlatego poniżej określono gęstość energii dysypacji w rozciąganym i ściskanym oraz skręcanym pręcie pryzmatycznym o przekroju kołowym przy obciążeniach harmonicznych. Przy tego typu deformacjach elementów objętości ciała materialnego występują siły bezwładności, które dla uproszczenia rozważań pominięto. W konsekwencji poniżej rozpatrywane są zależności, które nie zależą od gęstości materiału. Pozwalają one jednak oszacować przyrost temperatury w analizowanym pręcie (z błędem zwiększającym margines bezpieczeństwa) zgodnie ze wzorem:

$$\varphi(\Delta t) = \xi(\Delta t), \tag{6}$$

gdzie w przybliżeniu

$$\xi(\Delta t) = \rho\, c \Delta T\,, \tag{7}$$

gdzie: $\xi(\Delta t)$ – energia cieplna wygenerowana w jednostce objętości w czasie Δt;

ρ – gęstość materiału;

c – ciepło właściwe materiału;

ΔT – przyrost temperatury jednostki objętości materiału w czasie Δt.

GĘSTOŚĆ ENERGII DYSYPACJI PRZY HARMONICZNYM ROZCIĄGANIU-ŚCISKANIU I SKRĘCANIU

W przypadku zgodnych w fazie harmonicznych obciążeń osiowych i obrotowych sprężystolepkiego pręta powstają w jego przekroju poprzecznym naprężenia:

$$\sigma = \sigma_a \sin\omega t \quad , \quad \tau = \tau_a \sin\omega t\,, \tag{8}$$

gdzie: $\sigma_a = \dfrac{P_a}{\pi r_0^2}$ – amplituda naprężenia normalnego;

P_a – amplituda siły osiowej;

r_0 – zewnętrzny promień pręta;

$\tau_a = \dfrac{2M_a r}{\pi r_0^4}$ – amplituda naprężenia stycznego w odległości r od osi pręta;

M_a – amplituda momentu obrotowego;

ω – częstość kołowa obciążeń.

Wywołują one odkształcenia właściwe [3]:

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{E^2 + \eta^2\omega^2}}\sigma_a \sin(\omega t - \alpha); \tag{9}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{E^2 + \eta^2\omega^2}}\tau_a \sin(\omega t - \alpha), \tag{10}$$

gdzie

$$\alpha = ar\,\mathrm{ctg}\frac{\eta\omega}{E}. \tag{11}$$

Odpowiadająca odkształceniom (9) i (10) energia dysypowana w jednostce objętości w czasie Δt wynosi [3]:

$$\varphi(\Delta t) = \varphi_\sigma(\Delta t) + \varphi_\tau(\Delta t), \tag{12}$$

gdzie:

$$\varphi_\sigma(\Delta t) = \frac{\omega\,\Delta t \sin\alpha}{2\sqrt{E^2 + \eta^2\omega^2}}\sigma_a^2; \tag{13}$$

$$\varphi_\tau(\Delta t) = \frac{\omega\,\Delta t(1+\nu)\sin\alpha}{\sqrt{E^2 + \eta^2\omega^2}}\tau_a^2. \tag{14}$$

Oznacza to, że rozkład gęstości energii dysypacji w przypadku sił osiowych jest równomierny, a przy skręcaniu zmienia się z kwadratem odległości od osi pręta.

WPŁYW ODKSZTAŁCEŃ OBJĘTOŚCIOWYCH I POSTACIOWYCH PRĘTA NA GĘSTOŚĆ ENERGII DYSYPACJI

Energia sprężystych odkształceń właściwych ε i γ pręta przy naprężeniach σ i τ może być odniesiona do jednostki objętości i rozdzielona na energię odkształceń objętościowych [2]:

$$\psi_{\sigma v} = \frac{1-2v}{6E}\sigma^2, \quad \psi_{\tau v} = 0 \tag{15}$$

i energię odkształceń postaciowych:

$$\psi_{\sigma d} = \frac{1+\nu}{3E}\sigma^2, \quad \psi_{\tau d} = \frac{1+\nu}{E}\tau^2, \tag{16}$$

gdzie indeksami σ i τ oznaczono człony odpowiadające naprężeniom σ i τ oraz indeksami v i d człony dotyczące odkształceń objętościowych i postaciowych. Podobnie gęstość energii dysypacji można rozdzielić na gęstość energii rozpraszanej w wyniku odkształceń objętościowych [3]:

$$\varphi_{\sigma v}(\Delta t) = \frac{(1-2\nu)\omega\Delta t\sin\alpha}{6\sqrt{E^2+\eta^2\omega^2}}\sigma_a^2, \; \varphi_{\tau v}(\Delta t) = 0 \tag{17}$$

i na gęstość energii rozpraszanej w wyniku odkształceń postaciowych:

$$\varphi_{\sigma d}(\Delta t) = \frac{(1+\nu)\omega\Delta t\sin\alpha}{3\sqrt{E^2+\eta^2\omega^2}}\sigma_a^2, \; \varphi_{\tau d}(\Delta t) = \frac{(1+\nu)\omega\Delta t\sin\alpha}{\sqrt{E^2+\eta^2\omega^2}}\tau_a^2. \tag{18}$$

Stąd jest oczywistym, że gęstość energii dysypacji w sprężystolepkim pręcie jest wprost proporcjonalna do jego energii odkształcenia sprężystego na jednostkę objętości. W szczególności:

$$\frac{\psi_{\sigma d}}{\psi_{\sigma v}} = \frac{\varphi_{\sigma d}(\Delta t)}{\varphi_{\sigma v}(\Delta t)} = \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu}, \tag{19}$$

tzn. przy obciążeniach osiowych odkształcenia postaciowe prowadzą do rozproszenia znacznie większej porcji energii niż odkształcenia objętościowe. Można też stwierdzić, że odkształcenia postaciowe skręcanego pręta są źródłem energii dysypacji rosnącej z kwadratem odległości od osi pręta. Skłania to do określenia podziału całkowitej ilości energii rozproszonej w określonym czasie w pręcie o długości l i objętości V na energię rozproszoną w części wewnętrznej o objętości $V_1 = \pi r^2 l$ i na energię rozproszoną w części zewnętrznej o objętości $V_2 = V - V_1 = \pi r_0^2 l - V_1$ dla różnych wartości $\frac{r}{r_0}$.

PODZIAŁ ENERGII DYSYPACJI W SPRĘŻYSTOLEPKIM PRĘCIE

Całkowita energia dysypacji w sprężystolepkim pręcie poddanym harmonicznemu rozciąganiu-ściskaniu w czasie Δt ma wartość:

$$\phi_\sigma(\Delta t) = \varphi_\sigma(\Delta t) V , \tag{20}$$

a całkowita energia rozproszona w objętościach V_1 i V_2 ma się tak do siebie jak te objętości. Innymi słowy, przy obciążeniach osiowych wzrost temperatury sprężystolepkiego pręta jest jednakowy w każdym elemencie jego objętości (pomijając wpływ wymiany ciepła z otoczeniem). Z kolei w przypadku skręcania sprężystolepkiego pręta całkowita energia rozpraszana w czasie Δt w objętościach V_1 i V_2 wyraża się wzorami:

$$\phi_1(\Delta t) = \iiint_{V_1} \varphi_\tau(\Delta t)\, dV_1 \quad , \quad \phi_2(\Delta t) = \iiint_{V_2} \varphi_\tau(\Delta t)\, dV_2 , \tag{21}$$

czyli

$$\phi_1(\Delta t) = \int_0^{2\pi}\int_0^{r}\int_0^{l} \varphi_\tau(\Delta t)\, r\, d\beta\, dr\, dl = \frac{(1+\nu)\omega\,\Delta t \sin\alpha\, M_a^2 l}{\pi\sqrt{E^2 + \eta^2\omega^2}} \cdot \frac{r^4}{r_0^8} ; \tag{22}$$

$$\phi_2(\Delta t) = \int_0^{2\pi}\int_r^{r_0}\int_0^{l} \varphi_\tau(\Delta t)\, r\, d\beta\, dr\, dl = \frac{(1+\nu)\omega\,\Delta t \sin\alpha\, M_a^2 l}{\pi\sqrt{E^2 + \eta^2\omega^2}} \cdot \frac{r_0^4 - r^4}{r_0^8} . \tag{23}$$

Dla zilustrowania podziału całkowitej energii dysypacji na ϕ_1 i ϕ_2 zbadano iloraz:

$$\delta = \frac{\phi_1(\Delta t)}{\phi_2(\Delta t)}, \tag{24}$$

który zgodnie z (22) i (23) wynosi:

$$\delta = \frac{r^4}{r_0^4 - r^4}. \tag{25}$$

Wyniki obliczeń przedstawiono w tabeli 1.

Tabela 1. Wartości δ w funkcji r / r_0

$\frac{r}{r_0}$	0,1	0,3	0,5	0,6	0,7	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0,8	0,9
$\frac{V_1}{V_2}$	0,010	0,099	0,333	0,563	0,961	1	1,778	4,263
δ	0,001	0,008	0,067	0,141	0,316	0,333	1,144	1,908

Widoczna jest dominująca rola zewnętrznej części skręcanego pręta w rozpraszaniu energii.

WNIOSKI

1. Odkształcenia postaciowe sprężystolepkiego pręta są źródłem większej ilości ciepła niż odkształcenia objętościowe.
2. Gęstość energii cieplnej generowanej przy rozciąganiu-ściskaniu sprężystolepkiego pręta ma rozkład równomierny w całej jego objętości.
3. Gęstość energii cieplnej generowanej przy skręcaniu sprężystolepkiego pręta rośnie z kwadratem odległości od osi pręta.
4. Udział warstw zewnętrznych skręcanego pręta sprężystolepkiego w generowaniu ciepła jest dominujący.
5. Energia rozpraszana w izotropowym materiale sprężystolepkim przy odkształceniach zarówno objętościowych, jak i postaciowych zależy od jednego współczynnika tłumienia, który może być wyznaczony w jednoosiowej próbie rozciągania, skręcania lub zginania.

6. Iloraz całkowitej energii rozproszonej w wyniku harmonicznych obciążeń osiowych i energii rozproszonej w tym samym czasie na skutek synchronicznych z osiowymi obciążeń obrotowych sprężystolepkiego pręta wynosi:

$$\frac{\phi_\sigma(\Delta t)}{\phi_\tau(\Delta t)} = \frac{\varphi_\sigma(\Delta t)V}{\phi_1(\Delta t)+\phi_2(\Delta t)} = \frac{2\sigma_a^2}{(1+\nu)\tau_0^2}, \tag{26}$$

gdzie $\tau_0 = \tau_{\mathbf{max}}$ – naprężenie styczne w zewnętrznej warstwie skręcanego pręta.

BIBLIOGRAFIA

[1] Giergiel J., *Tłumienie drgań mechanicznych*, PWN, Warszawa 1990.

[2] Jakubowicz A., Orłoś Z., *Wytrzymałość materiałów*, WNT, Warszawa 1996.

[3] Kolenda J., *Dissipation energy in viscoelastic solids under multiaxial loads*, „Polish Maritime Research” (w druku).

[4] Nyashin Y., Lokhov V., Kolenda J., *On the stress-strain relations in viscoelastic solids*, „Marine Technology Transactions”, 2007, Vol. 18, (w druku).

[5] Panovko J. G., *Vnutrennieje trenije pri koliebanijach uprugich sistiem*, Fizmatgiz, Moskva 1960.

ABSTRACT

The paper presents formulae for density of energy dissipated in a viscoelastic rod subjected to harmonic tension-compression and torsion with the shares of volume changes and distortions taken into account. The total dissipation energy during a given period of time is also calculated with the dominant role of outer layers of the twisting rod indicated.

Recenzent dr hab. inż. Marek Sperski, prof. AMW