

Tomasz Szubrycht
Zbigniew Wiśniewski

**IDENTYFIKACJA I POPRAWIANIE
WSPÓLRZĘDNYCH ZNAKÓW NAWIGACYJNYCH
OBARCZONYCH GRUBYMI
BŁĘDAMI WYSTAWIENIA**

STRESZCZENIE

W artykule przedstawiono koncepcję wraz z teoretycznym uzasadnieniem wykorzystywania wyrównania swobodnego do identyfikacji znaków nawigacyjnych obciążonych grubymi błędami wystawienia. Artykuł zawiera wyniki testów numerycznych potwierdzających przydatność wyrównania swobodnego dla takiej identyfikacji w elementarnym i rozwiniętym układzie obserwacyjnym.

WSTĘP

Przy określaniu pozycji obserwowanej okrętu z reguły przyjmuje się założenie, że znaki nawigacyjne, w oparciu o które określa się pozycję, są punktami stałymi. W istocie jednak ich współrzędne są określone z pewnymi błędami średnimi ($m_{X_{R_j}}$, $m_{Y_{R_j}}$), charakteryzującymi losowe błędy wystawienia (w klasycznych związkach są one pomijalne).

W praktyce mogą jednak wystąpić sytuacje, w których znaki nawigacyjne będą wystawione błędnie, tzn. ich współrzędne mogą być obciążone błędami wykraczającymi poza przedziały dopuszczalne dla błędów losowych (np. podczas wystawiania na wybrzeżu potencjalnego przeciwnika). Takie błędy w teorii współczesnego rachunku wyrównawczego [2, 3] są nazywane błędami grubymi. Niewykryte błędy grube wystawienia w istotny sposób obniżają dokładność wyznaczenia pozycji okrętu. Ważnym zatem zagadnieniem jest zastosowanie takiej metody opracowania wyników obserwacji nawigacyjnych, która umożliwiłaby identyfikację, a następnie poprawienie współrzędnych stacji obciążonych tego rodzaju błędami.

Ogólna, teoretyczna koncepcja metody spełniającej postawione wyżej wymagania została sformułowana przez Z. Wiśniewskiego w monografii [8]. Ideą tej metody jest połączenie teorii wyrównania swobodnego (niezależnego od układu współrzędnych) z zasadami wyrównań odpornych na błędy grube. Rezultatem wyrównania swobodnego są nie tylko przyrosty do przybliżonych współrzędnych punktów wyznaczanych (pozycji okrętu), lecz także do współrzędnych punktów uznawanych w klasycznych rozwiązaniach jako punkty stałe (przyrosty do współrzędnych znaków nawigacyjnych). Koncepcja metody polega na założeniu (zweryfikowanym w [5]), że błędowi grubemu odpowiada stosunkowo duży przyrost do współrzędnej znaku nawigacyjnego obciążonego takim błędem.

PODSTAWY TEORETYCZNE WYRÓWNANIA SWOBODNEGO

W klasycznym wyrównaniu zakłada się, że macierz \mathbf{A} funkcjonalnego modelu zadania wyrównawczego

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{L} \\ \mathbf{C}_L &= m_0^2 \mathbf{P}^{-1} \\ \Phi(\mathbf{X}) &= \mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V} = \min\end{aligned}$$

jest macierzą kolumnowo pełnego rzędu i istnieje odwrotność $(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}$ [7] (\mathbf{V} – wektor poprawek, \mathbf{A} – znana macierz współczynników, \mathbf{C}_L – macierz kowariancji wyników pomiaru, \mathbf{P} – znana macierz wag, \mathbf{X} – wektor nieznanymi parametrów modelu, m_0^2 – nieznanymi współczynnik wariancji, N – liczba wyrównywanych obserwacji, r – liczba parametrów).

Pozwala to na przedstawienie estymatora $\hat{\mathbf{X}}$ minimalizującego funkcję celu $\Phi(\mathbf{X}) = \mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V}$, a więc rozwiązującego układ równań normalnych

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L} = \mathbf{0} \quad (1)$$

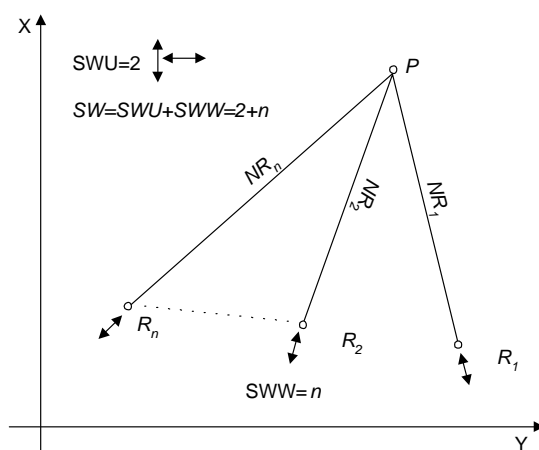
w postaci

$$\hat{\mathbf{X}} = -(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L}.$$

Taka klasyczna sytuacja występuje jednak tylko wtedy, gdy odpowiadająca wyrównywanemu układowi obserwacyjnemu struktura geometryczna nie zawiera stopni swobody.

Zgodnie z definicjami przedstawionymi w [8], wyróżnia się zewnętrzne stopnie swobody (SWU) określające możliwości przemieszczania się całej struktury geometrycznej względem osi układu współrzędnych ($\leftrightarrow, \updownarrow$) oraz jej obrót (\curvearrowright), a także wewnętrzne stopnie swobody (SWW) wynikające z możliwości wzajemnego przemieszczania się elementów tworzących tę strukturę. Całkowita liczba stopni swobody to $SW = SWU + SWW$.

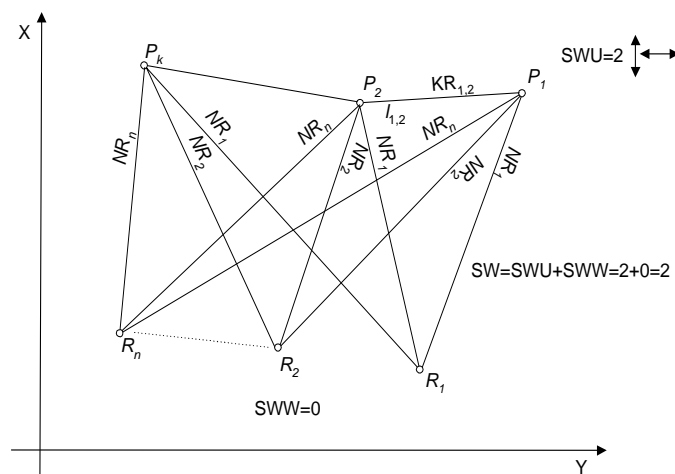
W przypadku traktowania znaków nawigacyjnych jako punkty stałe, struktura geometryczna przyporządkowana układowi obserwacyjnemu nie zawiera stopni swobody. Natomiast w sytuacji, gdy znane współrzędne tych znaków są uznawane jedynie za współrzędne przybliżone, struktura geometryczna staje się strukturą swobodną (nieświadomymi są nie tylko przyrosty do współrzędnych przybliżonych punktu P , lecz także przyrosty do znanych, wcześniej traktowanych jako stałe, współrzędnych znaków nawigacyjnych R_1, R_2, \dots, R_n). Nieznane przyrosty do współrzędnych znaków nawigacyjnych „uwalniają” strukturę geometryczną. Na rysunku 1. przedstawiono przykład swobodnej, elementarnej struktury geometrycznej o dwóch stopniach swobody względem układu współrzędnych oraz n stopniach swobody wewnętrznej (przemieszczanie się stacji R_i wzdłuż ustalonych linii namiarów NR_i).



Rys. 1. Stopnie swobody elementarnej struktury geometrycznej

W rozwiniętych, geometrycznych strukturach nawigacyjnych istnieją na ogół obserwacje wiążące zarówno punkty wyznaczone P_i , jak i pośrednio znaki nawigacyjne R_i . Dlatego też „uwolnienie” w takich strukturach punktów R_i nie stwarza

wewnętrznych stopni swobody. Przykład rozwiniętej, swobodnej struktury geometrycznej przedstawiono na rysunku 2.



Rys. 2. Stopnie swobody rozwiniętej struktury geometrycznej

Z przedstawionych przykładów wynika, że analizowany system nawigacyjny traktowany jako struktura swobodna może mieć $2+n$ stopni swobody (struktura elementarna) lub, w przypadku struktury rozwiniętej, tylko 2 stopnie swobody (są to jedynie stopnie swobody zewnętrznej).

Ze stopniami swobody struktury geometrycznej wiąże się defekt (d) układu obserwacyjnego, a w zasadzie, w odniesieniu do stosowanych w tej pracy modeli liniowych, defekt macierzy \mathbf{A} . Jest on różnicą między liczbą kolumn tej macierzy a jej rzędem i jest równy całkowitej liczbie stopni swobody struktury geometrycznej [7, 8], tzn.

$$d = r - \text{rzqd} \left(\mathbf{A}_{N,r} \right) = SW, \quad (2)$$

gdzie

$$SW = SWU + SWW.$$

Z teorii algebry macierzy wynika ponadto [7], że prawdziwa jest także zależność:

$$d = r - \text{rzqd} \left(\mathbf{A}_{r,r}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \right) = SW. \quad (3)$$

Jeśli $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$ jest macierzą z „defektem” ($d > 0$), to nie istnieje jej klasyczna odwrotność $(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}$, a więc nie istnieje również klasyczne rozwiązanie równania normalnego (1).

Struktura geometryczna jest swobodna (o czym już była mowa), ponieważ niewiadomymi są nie tylko przyrosty do współrzędnych przybliżonych punktu P (w układzie elementarnym) lub punktów P_1, P_2, \dots, P_k (w układzie rozwiniętym), lecz także przyrosty do znanych, wcześniej traktowanych jako stałe, współrzędnych znaków nawigacyjnych R_1, R_2, \dots, R_n . Wektor niewiadomych \mathbf{X} ma zatem następującą postać:

– w układzie elementarnym:

$$\mathbf{X} = [dX, dY; dX_{R_1}, dY_{R_1}, \dots, dX_{R_n}, dY_{R_n}]^T = [\mathbf{X}_P^T, \mathbf{X}_R^T]^T;$$

– w układzie rozwiniętym:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= [dX_1, dY_1, \dots, dX_k, dY_k; dX_{R_1}, dY_{R_1}, \dots, dX_{R_n}, dY_{R_n}]^T = \\ &= [\mathbf{X}_P^T, \mathbf{X}_R^T]^T, \end{aligned}$$

gdzie:

$$\mathbf{X}_P = [dX, dY]^T \text{ (lub } \mathbf{X}_P = [dX_1, dY_1, \dots, dX_k, dY_k]^T);$$

$$\mathbf{X}_R = [dX_{R_1}, dY_{R_1}, \dots, dX_{R_n}, dY_{R_n}]^T$$

(w klasycznym rozwiązaniu $\mathbf{X} = \mathbf{X}_P$).

W takiej sytuacji liczba kolumn macierzy \mathbf{A} (a jednocześnie liczba wierszy i kolumn kwadratowej macierzy $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$) ulega także zwiększeniu o wartość $2n$. Zatem:

$$\begin{cases} r = 2 + 2n \text{ dla układu elementarnego} \\ r = 2k + 2n \text{ dla układu rozwiniętego.} \end{cases} \quad (4)$$

W teorii rachunku wyrównawczego, dotyczącej wyrównania swobodnych struktur geometrycznych [6, 9, 11], liczbę obserwacji nadliczbowych f ustala się na podstawie wzoru:

$$f = N - r + d. \quad (5)$$

W klasycznych rozwiązaniach liczba obserwacji nadliczbowych f jest większa od zera (co oznacza, że układ obserwacyjny może podlegać wyrównaniu) wtedy, gdy $N > r \Leftrightarrow f = N - r > 0$.

W strukturach swobodnych obserwacje mogą być natomiast wyrównywane, jeśli

$$N > r - d \Leftrightarrow f = N - r + d > 0. \quad (6)$$

Z wcześniejszej analizy wynika, że w elementarnym układzie swobodnym mamy

$$r = 2 + 2n, d = 2 + n, N = n.$$

Zatem na podstawie nierówności (6) można stwierdzić, że

$$N > (2 + 2n - 2 - n = n).$$

Ponieważ jednak w układzie tym liczba wykonywanych obserwacji (np. namiarów) N jest równa liczbie znaków nawigacyjnych n , więc zawsze $N = n$. Wynika stąd, że w elementarnym układzie swobodnym nie istnieją obserwacje nadliczbowe. Zatem tworzące go obserwacje nie mogą, w odróżnieniu od klasycznego układu elementarnego, zostać wyrównane. Elementarny układ swobodny może jedynie podlegać innemu rodzajowi optymalizacji.

Przeprowadzając podobną analizę w rozwiniętym układzie swobodnym, można zauważyć, że

$$r = 2k + 2n, d = 2.$$

Obserwacje tworzące rozwinięty układ swobodny mogą więc podlegać wyrównaniu, jeśli

$$N > (2k + 2n - 2). \quad (7)$$

Z przedstawionych uwag wynika, że nie każda swobodna struktura geometryczna może podlegać wyrównaniu w sensie spełnienia minimum funkcji $\Phi(\mathbf{X}) = \mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V}$. W wyrównaniu swobodnym występuje jednak dodatkowe kryterium optymalizacyjne dotyczące przyrostów \mathbf{X} . Ma ono postać [6, 8, 11]:

$$\psi(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T \mathbf{P}_X \mathbf{X} = \min, \quad (8)$$

gdzie

\mathbf{P}_X – dodatkowa, zdefiniowana w dalszej części pracy, macierz wag współrzędnych przybliżonych punktów wyznaczanych i współrzędnych znaków nawigacyjnych.

Wyrównanie swobodne polega więc nie tylko na wyrównaniu obserwacji (na podstawie kryterium $\Phi(\mathbf{X}) = \mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V} = \min$), lecz także na optymalnym (w sensie $\Psi(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T \mathbf{P}_X \mathbf{X} = \min$) wpasowaniu wyrównywanej struktury geometrycznej w strukturę przybliżoną. Takie wpasowanie, związane z przemieszczeniem wszystkich punktów, pozwoli na ujawnienie odstających, obciążonych błędami grubymi punktów dostosowania – znaków nawigacyjnych. Należy się bowiem spodziewać, że przyrosty do współrzędnych takich punktów nie będą się mieściły w przedziałach dopuszczalnych dla przyrostów o charakterze losowym.

W teorii wyrównania swobodnego model funkcjonalny zadania wyrównawczego, a więc model $\mathbf{V} = \mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{L}$, jest na ogół zapisywany w postaci [6]:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} + \mathbf{L} \Leftrightarrow \mathbf{V} = \mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{L}, \quad (9)$$

N, h N, d $h, 1$ $d, 1$

gdzie

$$h = \text{rzqd}(A), \text{ przy czym } h + d = r.$$

Liczba kolumn macierzy \mathbf{A}_2 jest równa defektowi układu obserwacyjnego (przypomnijmy, że w elementarnym układzie swobodnym $d = 2 + n$, natomiast w rozwiniętym układzie swobodnym o pełnym programie obserwacyjnym $d = 2$). Liczba kolumn macierzy \mathbf{A}_1 jest równa rzędowi macierzy \mathbf{A} , a ponadto

$$\text{rzqd}(\mathbf{A}_1) = \text{rzqd}(\mathbf{A}) = \text{rzqd}(\mathbf{A}_1^T \mathbf{P} \mathbf{A}_1) = \text{rzqd}(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}) = h \quad (h > r).$$

N, h N, r h, h r, r

Wynika stąd, że \mathbf{A}_1 jest macierzą kolumnowo pełnego rzędu i istnieje, co ma istotne znaczenie w dalszych wyprowadzeniach, klasyczna odwrotność $(\mathbf{A}_1^T \mathbf{P} \mathbf{A}_1)^{-1}$. W podobny sposób jest także tworzona struktura wektora \mathbf{X}

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1^T, \mathbf{X}_2^T]^T.$$

Łącząc równanie (9) z dwoma, wskazanymi wcześniej, kryteriami optymalizacyjnymi, uzyskuje się następujące zadanie wyrównania swobodnego:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{V} = \mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{L} &= [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} + \mathbf{L} \\ \Phi(\mathbf{X}) = \mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V} &= \min \quad (10) \\ \Psi(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T \mathbf{P}_X \mathbf{X} &= \min \end{aligned} \right\}.$$

Macierz \mathbf{P} jest macierzą wag wyników pomiaru. Nowa macierz \mathbf{P}_X dotyczy, o czym już była mowa, przybliżonych współrzędnych punktów P_i oraz współrzędnych znaków nawigacyjnych. Zakładając, że są to wielkości wzajemnie niezależne, macierz \mathbf{P}_X można przedstawić w postaci (w odniesieniu do wcześniejszej struktury wektora $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_P^T, \mathbf{X}_R^T]^T$):

$$\mathbf{P}_X = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{X_P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_{X_R} \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} \mathbf{X}_P \\ \mathbf{X}_R \end{bmatrix} = \mathbf{X}. \quad (11)$$

Bloki \mathbf{P}_{X_P} , \mathbf{P}_{X_R} macierzy \mathbf{P}_X należy wiązać z dostępnymi, statystycznymi informacjami o współrzędnych, których te macierze dotyczą. Załóżmy na przykład, że wyrównaniu swobodnemu podlega układ obserwacyjny (elementarny lub rozwinęty), który wcześniej został wyrównany metodą klasyczną. Wyrównanym współrzędnym punktów P_i przyporządkowana jest wówczas odpowiednia macierz kowariancji \mathbf{C}_P . Zatem w takim przypadku, zgodnie z ogólną definicją macierzy wag, należy przyjąć:

$$\mathbf{P}_{X_P} = \mathbf{C}_P^{-1}. \quad (12)$$

Współrzędne znaków nawigacyjnych mogą mieć również ustaloną macierz kowariancji \mathbf{C}_R . Załóżmy, że jest to macierz diagonalna o elementach

$$\mathbf{C}_R = \text{Diag} (m_{X_{R_1}}^2, m_{Y_{R_1}}^2, \dots, m_{X_{R_n}}^2, m_{Y_{R_n}}^2). \quad (13)$$

Biorąc pod uwagę (12), (13), macierz \mathbf{P}_X można przedstawić w postaci:

$$\mathbf{P}_X = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_P^{-1} & \vdots & & & \mathbf{0} & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & \vdots & m_{X_{R_1}}^{-2} & & & & & & \\ & \vdots & & m_{Y_{R_1}}^{-2} & & & & & \\ \mathbf{0} & \vdots & & & \ddots & & & & \\ & \vdots & & & & m_{X_{R_n}}^{-2} & & & \\ & \vdots & & & & & & m_{Y_{R_n}}^{-2} & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{X_P} & \vdots & \mathbf{0} \\ \dots & \vdots & \dots \\ \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{P}_{X_R} \end{bmatrix}$$

jak układ równań warunkowych w znanej w rachunku wyrównawczym metodzie korelat, np. [1]). Liczba równań w drugim, macierzowym równaniu (**) układu (14) jest zgodna z defektem układu obserwacyjnego i jednocześnie z całkowitą liczbą stopni swobody struktury geometrycznej. Oznacza to, że równania tworzące drugi układ są niezależne od równań z pierwszego układu [8]. Umożliwia to zastosowanie kryterium optymalizacyjnego $\Psi(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T \mathbf{P}_X \mathbf{X} = \min$ tylko do pierwszego równania układu (14). Uwzględniając powyższe uwagi, w drugim etapie rozwiązywania problemu (10) należy sformułować następujące zadanie:

$$\left. \begin{aligned} & \mathbf{A}_1^T \mathbf{P} \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_1 + \mathbf{A}_1^T \mathbf{P} \mathbf{A}_2 \mathbf{X}_2 + \mathbf{A}_1^T \mathbf{P} \mathbf{L} = \mathbf{0} \\ & \psi(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T \mathbf{P}_X \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^T & \mathbf{X}_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{X_1} & \vdots & \mathbf{0} \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{P}_{X_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{X}_1^T \mathbf{P}_{X_1} \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2^T \mathbf{P}_{X_2} \mathbf{X}_2 = \min \end{aligned} \right\} .$$

Wprowadzając następujące oznaczenia

$$\mathbf{B}_{h,h+d} = [\mathbf{A}_1^T \mathbf{P} \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_1^T \mathbf{P} \mathbf{A}_2]; \quad (15)$$

$$\mathbf{\Delta}_{n,1} = \mathbf{A}_1^T \mathbf{P} \mathbf{L},$$

zadanie to można zapisać w postaci:

$$\left. \begin{aligned} & \mathbf{B} \mathbf{X} + \mathbf{\Delta} = \mathbf{0} \\ & \Psi(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T \mathbf{P}_X \mathbf{X} = \min \end{aligned} \right\} .$$

Jest to problem optymalizacyjny klasycznej metody warunkowej (korelat). Do rozwiązania powyższego problemu konieczne jest zastąpienie funkcji $\Psi(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T \mathbf{P}_X \mathbf{X}$ funkcją Lagrange'a o postaci:

$$\xi(\mathbf{X}) = \psi(\mathbf{X}) - 2 \mathbf{K}^T (\mathbf{B} \mathbf{X} + \mathbf{\Delta}) = \mathbf{X}^T \mathbf{P}_X \mathbf{X} - 2 \mathbf{K}^T (\mathbf{B} \mathbf{X} + \mathbf{\Delta}), \quad (16)$$

gdzie

$\mathbf{K}_{h,1}$ – wektor korelat (mnożników Lagrange'a).

Uzyskuje się w ten sposób wtórny problem optymalizacyjny [1]:

$$\left. \begin{aligned} & \mathbf{B} \mathbf{X} + \mathbf{\Delta} = \mathbf{0} \\ & \xi(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T \mathbf{P}_X \mathbf{X} - 2 \mathbf{K}^T (\mathbf{B} \mathbf{X} + \mathbf{\Delta}) = \min \end{aligned} \right\} . \quad (17)$$

Korzystając z warunku koniecznego ekstremum funkcji $\xi(\mathbf{X})$, wyznaczamy

$$\frac{\partial \xi(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} = 2\mathbf{X}^T \mathbf{P}_X - 2\mathbf{K}^T \mathbf{B} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \hat{\mathbf{X}} = \mathbf{P}_X^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K}. \quad (18)$$

Wstawiając (18) do równania $\mathbf{B}\mathbf{X} + \Delta = \mathbf{0}$, uzyskamy następujące równanie (równanie normalne korelat):

$$\mathbf{B} \mathbf{P}_X^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K} + \Delta = \mathbf{0}. \quad (19)$$

Ponieważ $\text{rzqd}(\mathbf{B} \mathbf{P}_X^{-1} \mathbf{B}^T) = h$, więc istnieje $(\mathbf{B} \mathbf{P}_X^{-1} \mathbf{B}^T)^{-1}$ [7]. Tym samym istnieje następujące rozwiązanie równania (19):

$$\mathbf{K} = -(\mathbf{B} \mathbf{P}_X^{-1} \mathbf{B}^T)^{-1} \Delta. \quad (20)$$

Wstawiając powyższe rozwiązanie do zależności $\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{P}_X^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K}$, ostatecznie uzyskamy:

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{P}_X^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K} = -\mathbf{P}_X^{-1} \mathbf{B}^T (\mathbf{B} \mathbf{P}_X^{-1} \mathbf{B}^T)^{-1} \Delta. \quad (21)$$

Ponadto, rozwijając wyrażenie (21), zapiszemy:

$$\hat{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{X}}_1 \\ \hat{\mathbf{X}}_2 \end{bmatrix} = -\mathbf{P}_X^{-1} \mathbf{B}^T (\mathbf{B} \mathbf{P}_X^{-1} \mathbf{B}^T)^{-1} \Delta = - \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{x_1} & \vdots & \mathbf{0} \\ \dots & \vdots & \dots \\ \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{P}_{x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2^T \mathbf{P} \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} (\mathbf{B} \mathbf{P}_X^{-1} \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P} \mathbf{L}$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathbf{X}}_1 &= -\mathbf{P}_{x_1}^{-1} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P} \mathbf{A}_1 (\mathbf{B} \mathbf{P}_X \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P} \mathbf{L} \\ \hat{\mathbf{X}}_2 &= -\mathbf{P}_{x_2}^{-1} \mathbf{A}_2^T \mathbf{P} \mathbf{A}_1 (\mathbf{B} \mathbf{P}_X \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P} \mathbf{L} \end{aligned} \right\}. \quad (22)$$

Wyrównane współrzędne punktów P_i oraz poprawione współrzędne stacji R_j (optymalnie wpasowane w wyniku wyrównania swobodnego) można uzyskać, korzystając ze wzoru:

$$\hat{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Z}} \\ \hat{\mathbf{Z}}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}^0 \\ \mathbf{Z}_R \end{bmatrix} + \hat{\mathbf{X}}. \quad (23)$$

gdzie:

$\mathbf{Z} = [X_1, Y_1, \dots, X_k, Y_k]^T$ – wektor pozycji własnych (współrzędnych punktów P_i);

$\mathbf{Z}^0 = [X_1^0, Y_1^0, \dots, X_k^0, Y_k^0]^T$ – wektor pozycji przybliżonych;

$\mathbf{Z}_R = [X_{R_1}, Y_{R_1}, \dots, X_{R_n}, Y_{R_n}]^T$ – wektor współrzędnych stacji.

Zauważmy, że podział wektora przyrostów $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1^T, \mathbf{X}_2^T]^T$ nie pokrywa się z podziałem łącznego wektora współrzędnych $\mathbf{U} = [\mathbf{Z}^T, \mathbf{Z}_R^T]^T$. Pierwszy z tych podziałów jest związany z defektem swobodnego układu obserwacyjnego, natomiast drugi – z rodzajem punktów (defekt układu nie jest na ogół zgodny z liczbą współrzędnych stacji).

W wyrównaniu swobodnym szczególne znaczenie, oprócz wartości przyrostów $\hat{\mathbf{X}}_R$ do pierwotnych współrzędnych stacji, mają błędy średnie wszystkich wyrównanych współrzędnych. Ważne jest zatem wyznaczenie macierzy kowariancji wektora $\hat{\mathbf{U}}$. Macierz ta ma następującą strukturę:

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{U}}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{Z}}} & \text{cov}(\hat{\mathbf{Z}}, \hat{\mathbf{Z}}_R) \\ \text{cov}(\hat{\mathbf{Z}}_R, \hat{\mathbf{Z}}) & \hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{Z}}_R} \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Macierz $\hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{Z}}}$ to ostateczna (po wyrównaniu swobodnym) macierz kowariancji współrzędnych punktów P_i (wcześniej znana na poziomie $\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{Z}}}$). Natomiast $\hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{Z}}_R}$ to macierz kowariancji poprawionych współrzędnych znaków nawigacyjnych. Przez $\text{cov}(\hat{\mathbf{Z}}, \hat{\mathbf{Z}}_R) = \text{cov}(\hat{\mathbf{Z}}_R, \hat{\mathbf{Z}})$ oznaczono bloki zawierające kowariancje pomiędzy wektorami $\hat{\mathbf{Z}}$ i $\hat{\mathbf{Z}}_R$.

Macierz kowariancji łącznego wektora $\hat{\mathbf{U}}$ można wyznaczyć na podstawie zależności:

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{U}}} = \mathbf{D} \mathbf{C}_L \mathbf{D}^T = m_0^2 \mathbf{D} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{D}^T \mathbf{D}, \quad (25)$$

gdzie:

$$\mathbf{C}_L = m_0^2 \mathbf{P}^{-1};$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{P}_X^{-1} \mathbf{B}^T (\mathbf{B} \mathbf{P}_X^{-1} \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}.$$

Po odpowiednim podstawieniu macierz $C_{\hat{u}}$ można zapisać także w postaci:

$$C_{\hat{u}} = m_0^2 \mathbf{P}_X^{-1} \mathbf{B}^T (\mathbf{B} \mathbf{P}_X^{-1} \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P} \mathbf{A}_1 (\mathbf{B} \mathbf{P}_X^{-1} \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{B} \mathbf{P}_X^{-1}. \quad (26)$$

Współczynnik m_0^2 określa wzór:

$$m_0^2 = \frac{\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V}}{f} = \frac{\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V}}{N - r + d}. \quad (27)$$

W układzie elementarnym $f = 0$ (brak obserwacji nadliczbowych) i nie ma możliwości wyznaczenia m_0 . W takim wypadku w procesie optymalnego wpasowania można przyjąć, że

$$\mathbf{C}_L = \mathbf{P}^{-1}, \quad (28)$$

co jest równoważne z założeniem $m_0 = 1$ (w rzeczywistości takie założenie jest spełnione przy dobrym rozpoznaniu wartości błędów średnich pomiaru).

WYRÓWNANIE SWOBODNE UKŁADU ELEMENTARNEGO

Przedstawiona w pierwszej części artykułu teoria zostanie zastosowana do wyrównania swobodnego układu elementarnego. Przyjęto dwie różne wersje rozwiązań. W pierwszej z nich wyrównanie swobodne poprzedzone zostanie klasycznym wyrównaniem wstępnym, w którym niewiadomymi są tylko przyrosty do przybliżonych współrzędnych punktu P . Wyrównane w ten sposób współrzędne (o ustalonej macierzy kowariancji) będą traktowane jako współrzędne przybliżone w wyrównaniu swobodnym.

W drugiej wersji układ elementarny nie będzie podlegał wyrównaniu wstępnemu, a tym samym współrzędne przybliżone punktu P pozostaną bez zmian.

Każde z powyższych rozwiązań ma zalety i wady. W przypadku wykorzystania wyrównania swobodnego do celów nawigacyjno-hydrograficznego zabezpieczenia działań okrętów w strefie przybrzeżnej (działań o zwiększonych wymaganiach dokładnościowych) wyrównanie swobodne z wyrównaniem wstępnym jest (co zostało wykazane w [5]) lepszym rozwiązaniem, zarówno pod względem merytorycznym, jak i uzyskiwanych dokładności wyznaczeń.

$$\mathbf{L}_{6,1} = \begin{bmatrix} NR_{1,1}^0 - NR_{1,1}^{ob} \\ NR_{1,2}^0 - NR_{1,2}^{ob} \\ NR_{1,3}^0 - NR_{1,3}^{ob} \\ NR_{1,4}^0 - NR_{1,4}^{ob} \\ NR_{1,5}^0 - NR_{1,5}^{ob} \\ NR_{1,6}^0 - NR_{1,6}^{ob} \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_{6,6} = \begin{bmatrix} m_{NR_{1,1}}^{-2} & & & & & \\ & m_{NR_{1,2}}^{-2} & & & & \\ & & m_{NR_{1,3}}^{-2} & & & \\ & & & m_{NR_{1,4}}^{-2} & & \\ & & & & m_{NR_{1,5}}^{-2} & \\ & & & & & m_{NR_{1,6}}^{-2} \end{bmatrix}.$$

Należy zauważyć, że nie ma w tym układzie obserwacji nadliczbowych, gdyż $N = 6$, $r = 2+2n$, $d = 8$, a zatem $f = N - r + d = 6 - 14 + 8 = 0$. Wynika stąd, że rezultatem wyrównania, podobnie jak każdego innego swobodnego układu elementarnego, nie będą tutaj wyrównane obserwacje (namiary), lecz jedynie optymalne wpasowanie struktury wyrównywanej w strukturę przybliżoną. Wyznaczona po takim wyrównaniu (wpasowaniu) macierz kowariancji $\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{U}}}$ zawiera na przekątnej kwadraty błędów średnich charakteryzujących dokładność wpasowania, a więc kwadraty błędów średnich każdej ze współrzędnych wektora:

$$\hat{\mathbf{U}} = [\hat{\mathbf{Z}}^T, \hat{\mathbf{Z}}_R^T]^T = [\hat{X}, \hat{Y} : \hat{X}_{R_1}, \hat{Y}_{R_1}, \dots, \hat{X}_{R_1}, \hat{Y}_{R_1}]^T.$$

Z uwagi na brak obserwacji nadliczbowych, macierz ta jest obliczana przy założeniu, że

$$\mathbf{C}_L = \mathbf{P}^{-1} (\Leftrightarrow m_0 = 1).$$

WYRÓWNANIE SWOBODNE UKŁADU ROZWIĘTEGO

W układzie uwzględniającym kilka kolejnych pozycji okrętu (układ rozwinięty) istnieje możliwość wykrywania błędów grubych we współrzędnych (identyfikacja błędnych znaków nawigacyjnych) i jednocześnie wyznaczenie wyrównanej pozycji obserwowanej z wymaganą dokładnością. Stopień skuteczności tego procesu jest uzależniony od liczby przyjętych do obliczeń pozycji okrętu, tzn. od stopnia rozwiniętej struktury geometrycznej (liczby k). W artykule wykazaliśmy, że układ rozwinięty o dwu pozycjach okrętu ($k = 2$) nie zawiera, podobnie jak układ elementarny, obserwacji nadliczbowych. Identyfikacyjne własności obu tych układów będą więc podobne. W przedstawionych dalej analizach układu symulacyjnego przyjęto

więc rozwiniętą strukturę geometryczną o $k = 3$, $n = 6$ i pełnym programie obserwacyjnym. Taka struktura była już analizowana w kontekście ogólnych, teoretycznych własności.

Podobnie jak w przypadku wyrównania elementarnego układu swobodnego, również w układzie rozwiniętym istnieje możliwość realizacji procesu wyrównania w 2 wariantach, czyli z wyrównaniem wstępnym oraz bez wyrównania wstępnego. Wiąże się to z koniecznością odpowiedniego formułowania bloków macierzy \mathbf{P}_X . Na przykład, dla $k = 3$ i $n = 6$ macierz ta ma następującą strukturę:

- z wyrównaniem wstępnym

$$\mathbf{P}_X = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_z^{-1} & \vdots & & & \mathbf{0} & & & & \\ 6,6 & & & & & & & & \\ \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ & & m_{X_{R_1}}^{-2} & & & & & & \\ & & & m_{Y_{R_1}}^{-2} & & & & & \\ \mathbf{0} & \vdots & & & \ddots & & & & \\ & & & & & m_{X_{R_6}}^{-2} & & & \\ & & & & & & m_{Y_{R_6}}^{-2} & & \end{bmatrix} ;$$

- bez wyrównania wstępnego

$$\mathbf{P}_X = \begin{bmatrix} m_{X_1}^{-2} & & & & & & \vdots & & & & & & & & \\ & m_{Y_1}^{-2} & & & & & \vdots & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & \vdots & & & & & & & & \\ & & & m_{X_3}^{-2} & & & \vdots & & & & & & & & \\ & & & & m_{Y_3}^{-2} & & \vdots & & & & & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & & & & \vdots & m_{X_{R_1}}^{-2} & & & & & & & \\ & & & & & & \vdots & & m_{Y_{R_1}}^{-2} & & & & & & \\ & & & & & & \vdots & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & \vdots & & & & m_{X_{R_6}}^{-2} & & & & \\ & & & & & & \vdots & & & & & m_{Y_{R_6}}^{-2} & & & \\ & & & & & & \vdots & & & & & & & & \end{bmatrix}$$

- błąd średni namiaru (jednakowy dla każdego i, j) – $m_{NR_{i,j}} = 0.7^0$;
- błąd średni kursu (jednakowy dla każdego $i, i+1$) – $m_{KR_{i,i+1}} = 1.7^0$;
- błąd średni drogi (dla każdego $i, i+1$) – $m_{l_{i,i+1}} = 0.05 l_{i,i+1}$.

Ponadto, w wariancie bez wyrównania wstępnego przyjęto średnie błędy pozycji okrętu (jednakowe dla każdego i) o wartościach $m_{X_i} = 150_{[m]}$, $m_{Y_i} = 150_{[m]}$.

W tabeli 1. przedstawiono wyniki identyfikacji stacji o współrzędnych obarczonych błędami grubymi w układzie elementarnym. Proces ten realizowano dla dwóch wariantów: w pierwszym z nich błędami grubymi o wartościach $g_X = -300_{[m]}$, $g_Y = -300_{[m]}$ obarczono stację R_2 , natomiast w drugim błędami o wartościach $g_X = 250_{[m]}$, $g_Y = -250_{[m]}$ obarczono stację R_1 .

Tabela 1. Wyniki identyfikacji błędów grubych wystawienia w układzie elementarnym

| dX | dY | g_X | g_Y | | X [m] | Y [m] | g_X | g_Y | dX | dY |
|--------|-------|-------|-------|-------|-----------|-----------|-------|-------|-------|-------|
| -161.3 | 115.1 | - | - | P | 6080000.0 | 6465500.0 | - | - | 123.8 | 109.4 |
| 61.3 | -48.9 | 0 | 0 | R_1 | 6067975.1 | 6452655.2 | 250 | -250 | 102.2 | -93.4 |
| -148.6 | 143.0 | -300 | -300 | R_2 | 6069408.3 | 6457822.2 | 0 | 0 | 14.7 | 19.4 |
| -43.4 | 76.0 | 0 | 0 | R_3 | 6069918.0 | 6463191.0 | 0 | 0 | 18.2 | 78.6 |
| 21.9 | 69.0 | 0 | 0 | R_4 | 6070991.3 | 6468456.9 | 0 | 0 | 5.8 | 17.4 |
| 34.6 | -35.6 | 0 | 0 | R_5 | 6071887.2 | 6473397.4 | 0 | 0 | 25.3 | 25.6 |
| 55.9 | 36.4 | 0 | 0 | R_6 | 6072613.8 | 6476781.7 | 0 | 0 | 33.8 | 21.8 |

Przedstawione rezultaty wskazują, że wyrównanie swobodnego układu elementarnego pozwala na zidentyfikowanie znaków nawigacyjnych obarczonych grubymi błędami wystawienia. Błędem tym odpowiadają bowiem duże przyrosty do odpowiednich współrzędnych. Uwzględnienie tych przyrostów w ponownym wyrównaniu swobodnym zmniejsza wpływ błędów grubych wystawienia na dokładność ponownie wyrównanej pozycji okrętu. Należy jednak pamiętać, że uzyskiwane wartości przyrostów znacznie odbiegają od rzeczywistych wartości błędów, tym samym umożliwiają jedynie identyfikację błędów grubych wystawienia oraz wstępne (zgrubne) oszacowanie wartości tych błędów.

Inny eksperyment dotyczący układu elementarnego był związany z wielokrotnym wyznaczaniem pozycji własnej w różnych miejscach akwenu oraz z zastosowaniem wyrównania swobodnego w dwóch omawianych wcześniej wariantach dotyczących pozycji przybliżonej (bez wyrównania wstępnego i z wyrównaniem wstępnym). Uzyskiwane błędy średnie wyrównanych pozycji liczone na podstawie wzoru

$$m_p = \text{Tr}(\mathbf{C}_{\hat{z}}) = \sqrt{m_{\hat{x}}^2 + m_{\hat{y}}^2}$$

dla każdego z wariantów I, II, ..., VIII zestawiono w tabeli 2.

Tabela 2. Błędy średnie pozycji po wyrównaniu swobodnym (bez wyrównania wstępnego i z wyrównaniem wstępnym)

| | Współrzędne pozycji po wyrównaniu swobodnym [m] | | Błędy średnie pozycji m_p [m] | |
|------|---|---------|---------------------------------|------------------------|
| | | | bez wyrównania wstępnego | z wyrównaniem wstępnym |
| I | 6075000 | 6474500 | 336.9 | 285.3 |
| II | 6084250 | 6470000 | 374.2 | 314.2 |
| III | 6095000 | 6474000 | 419.6 | 334.1 |
| IV | 6076800 | 6455000 | 113.2 | 91.7 |
| V | 6086000 | 6455000 | 384.2 | 313.2 |
| VI | 6085100 | 6465300 | 292.6 | 246.1 |
| VII | 6088000 | 6461500 | 402.9 | 335.8 |
| VIII | 6095000 | 6461500 | 753.5 | 595.4 |

Przedstawione wyniki symulacji wskazują, że wartości błędów średnich pozycji okrętu określonej na podstawie wyrównania swobodnego bez wyrównania wstępnego są wyższe niż błędy uzyskane z zastosowaniem takiego wyrównania. Jest to związane z różną w obu tych przypadkach strukturą macierzy \mathbf{P}_x . Wyrównanie wstępne umożliwia bowiem bardziej realną i lepiej uzasadnioną teoretycznie ocenę wartości bloku \mathbf{P}_{x_p} .

W tabeli 3. przedstawiono wyniki eksperymentu badawczego polegającego na sprawdzeniu, w jakim stopniu wyrównanie swobodne rozwiniętego układu obserwacyjnego pozwala na zidentyfikowanie źle wystawionych znaków nawigacyjnych. W tym celu współrzędne znaku R_3 (I wariant), a następnie znaku R_2 (II wariant) obarczono błędami grubymi o wartościach $g_x = 200_{[m]}$, $g_y = 200_{[m]}$.

Tabela 3. Wyniki identyfikacji błędów grubych wystawienia

| wariant I | | | | wariant II | | | | |
|--------------------------|-------|----------------------------|-------|------------|----------------------------|-------|--------------------------|--------|
| Wyznaczone przyrosty [m] | | Symulowane błędy grube [m] | | | Symulowane błędy grube [m] | | Wyznaczone przyrosty [m] | |
| dX | dY | g_x | g_y | | g_x | g_y | dX | dY |
| 104.3 | 68.4 | - | - | P_1 | - | - | -96.8 | -112.3 |
| 98.3 | 114.6 | - | - | P_2 | - | - | -126.7 | -82.3 |
| 181.9 | 165.3 | - | - | P_3 | - | - | -151.4 | -37.3 |
| 56.2 | 82.4 | 0 | 0 | R_2 | 200 | 200 | 287.8 | 278.2 |
| 274.3 | 289.7 | 200 | 200 | R_3 | 0 | 0 | 68.7 | -82.1 |
| 50.2 | 76.3 | 0 | 0 | R_4 | 0 | 0 | 85.2 | 86.4 |
| 97.4 | -86.1 | 0 | 0 | R_5 | 0 | 0 | 87.1 | 57.4 |
| 57.2 | 81.2 | 0 | 0 | R_6 | 0 | 0 | 69.1 | 78.1 |

P_1, P_2, P_3 – współrzędne przybliżone;

R_1, \dots, R_7 – „znane” współrzędne znaków nawigacyjnych.

Z przedstawionych rezultatów wynika, że w rozwiniętym układzie nawigacyjnym po wyrównaniu swobodnym uzyskuje się przyrosty do współrzędnych znaków nawigacyjnych lepiej pasujące do symulowanych błędów grubych, aniżeli miało to miejsce w układzie elementarnym.

Jest to związane z istnieniem w tych układach obserwacji nadliczbowych (o ile $k > 2$), a tym samym nie tylko z optymalnym wpasowaniem, lecz także wyrównaniem wyników pomiaru.

PODSUMOWANIE

Przeprowadzone eksperymenty badawcze wykazały (tabela 1., 3.), że zarówno w elementarnym, jak i rozwiniętym układzie obserwacyjnym przyrosty do odstających współrzędnych przyjmują duże wartości (w stosunku do znaków o losowych błędach wystawienia). Uzyskane wyniki potwierdzają zatem teoretycznie uzasadnianą w pracy tezę, że zastosowanie wyrównania swobodnego umożliwia identyfikację, a w konsekwencji poprawienie współrzędnych znaku nawigacyjnego obciążonego błędem grubym wystawienia. Większą skuteczność w tym zakresie wykazują przy tym nawigacyjne układy rozwinięte. Testy numeryczne wskazują również, że pozycja błędnego znaku nawigacyjnego w łańcuchu nie ma istotnego wpływu na możliwość jego identyfikacji.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Baran L., *Teoretyczne podstawy opracowania wyników pomiarów geodezyjnych*, PWN, Warszawa 1999.
- [2] Kamiński W., Wiśniewski Z., *Analiza wybranych, odpornych na błędy grube, metod wyrównania obserwacji geodezyjnych*, cz. I i II, „Geodezja i Kartografia”, 1992, t. XLI.
- [3] Kamiński W., Wiśniewski Z., *The method off growing rigor for the adjustment of geodetic observation contaminated by gross error*, „Manuscripta Geodaetica”, nr 19.
- [4] Perelmutter A., *Eine Modifizierung der Helmert-Wolf-Losung der Freien Netze und einige Anwendungen*, ZfV, Heft3, 1980.
- [5] Szubrycht T., *Metodyczne i dokładnościowe aspekty określania pozycji obserwowanej w oparciu o system ramarkowy*, rozprawa doktorska, AMW, 2002.
- [6] Świątek K., Wiśniewski Z., *Wyrównywanie niezależnych sieci geodezyjnych oraz algorytmizacja obliczeń*, „Geodezja i Kartografia”, 1987, z. 2.
- [7] Wiśniewski Z., *Algebra macierzy i statystyka matematyczna w rachunku wyrównawczym*, Wydawnictwo UWM, Olsztyn 2000.
- [8] Wiśniewski Z., *Koncepcja metod opracowania wyników pomiarów nawigacyjnych*, AMW, Gdynia (w przygotowaniu do druku).
- [9] Wiśniewski Z., *Materiały dydaktyczne*, Olsztyn 2000.
- [10] Wiśniewski Z., *Methods for solving a system of independent conditional equations*, „Geodezja i Kartografia”, 1985, t. XXXIV, z. 39.
- [11] Wolf H., *Helmetrs Losung zum Problem der freien Netz mit singulorer Normalgleichundsmatrix*, ZfV, Heft 5, 1972.

ABSTRACT

The paper presents a concept and theoretical justification for using free compensation to identify navigation marks bearing substantial determination errors. It contains the results of numerical tests which confirm the usability of free compensation for such identification in the elementary and developed observation system.

Recenzent kmdr prof. dr hab. inż. Andrzej Felski