

Stanisław Polanowski

ANALIZA DANYCH POMIAROWYCH Z ZASTOSOWANIEM RUCHOMYCH OBIEKTÓW APROKSYMUJĄCYCH

STRESZCZENIE

W referacie na przykładzie obróbki wykresu indykatorowego zaprezentowano opracowane metody wygładzania i aproksymacji przebiegów pomiarowych zastosowane w opracowanych przez autora ruchomych obiektach aproksymujących. Omówiono aproksymację i wygładzanie ruchomymi funkcjami swobodnymi, sklejanymi i nitowanymi bez i z tłumieniem pochodnych oraz przybliżanie (wygładzanie) wielokrotne. Pokazano błędy całopredziałowego wygładzania funkcjami sklejanymi, a na przykładach pokazano, że zaprezentowane proste metody pozwalają na uzyskiwanie analogicznych wyników jak złożone programy falkowe. Obiekty te mogą być wykorzystywane także do generowania i analizy przebiegów resztowych, np. w diagnostyce.

APROKSMACJA I WYGŁADZANIE DANYCH POMIAROWYCH

Jeżeli matematyczny model przebiegu wielkości dany jako zbiór pomiarowy nie jest znany, to najczęściej stosowane jest przybliżenie w postaci kombinacji liniowej funkcji, którą można zapisać następująco:

$$\hat{y} = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_l f_l, \quad (1)$$

gdzie: \hat{y} – wielomian aproksymujący;
 f_1, f_2, \dots, f_l – liniowo niezależne funkcje;
 a_1, a_2, \dots, a_l – współczynniki (stałe).

Jako funkcje aproksymujące najczęściej stosowane są wielomiany potęgowe lub trygonometryczne. Te ostatnie są na ogół stosowane, gdy poszukiwane jest widmo częstotliwościowe przebiegu.

Współczynniki a są wyznaczone z warunku minimum funkcjonału:

$$MIN(S) = MIN\left(\sum_1^N (\tilde{y}_i - \hat{y}_i)^2\right), \quad (2)$$

gdzie: \tilde{y}_i – wartości pomierzone;
 \hat{y}_i – wartości z aproksymacji;
 N – liczebność zbioru pomiarowego.

Wzór (2) stanowi definicję metody minimum sumy kwadratów, obecnie powszechnie nazywanej metodą najmniejszych kwadratów [1].

Relacje pomiędzy wartościami pomierzonymi, rzeczywistymi i uzyskanymi z aproksymacji określa równość:

$$\tilde{y}_i = y_i + \varepsilon_{Ri} = \hat{y}_i + \varepsilon_{Mi} + \varepsilon_{Ri}, \quad (3)$$

gdzie: y_i – wartość rzeczywista;
 ε_{Ri} – błąd pomiaru;
 ε_{Mi} – błąd modelu.

Często jest dodatkowo postulowana normalność rozkładu ε_{Ri} , co zwykle jest przyjmowane bez sprawdzenia wobec braku dostatecznej liczebności próbek, a w ostateczności dla wyjawienia przypadków nadmiernych odchyień wartości ε_{Ri} bywają porównywane z odchyleniem standardowym wyznaczonym z resztowej sumy kwadratów S . Nadmierne wartości ε_{Ri} mogą istotnie wpłynąć na wyniki aproksymowania, powodując pogorszenie zgodności modelu z przedmiotem modelowania.

We wzorze (3) pominięto błędy obliczeniowe (błędy ograniczenia i zaokrąglenia [5]), które mogą także stanowić przyczynę przyjęcia nieadekwatnego modelu [4], co najczęściej może wystąpić w aproksymacji całoprzedziałowej wielomianami wysokich stopni, jak miało to miejsce w przytoczonym przykładzie. W przykładzie tym, aproksymując zmierzony przebieg ciśnienia spalania wielomianami potęgowymi wzrastających stopni, zauważono, że począwszy od stopnia dziewiątego wielomianu „średni błąd aproksymacji” wzrósł, co pozwoliło na dokonanie spo-

strzeżenia, że wielomian stopnia ósmego najlepiej przybliży analizowany przebieg [4]. Nie zwrócono należytej uwagi na to, że dodanie do modelu kolejnego liniowo niezależnego członu nigdy nie powoduje zwiększenia resztowej sumy kwadratów. Przykład ten pokazuje, że przy wyciąganiu wniosków natury ogólnej w oparciu o wyniki symulacji komputerowej należy zachować szczególną ostrożność.

Jednym ze sposobów uniknięcia tego rodzaju błędów jest podzielenie całego przedziału danych na oddzielne przedziały aproksymacji, co umożliwi zastosowanie wielomianów niższych stopni w mniejszych przedziałach [14].

Często aproksymacja bywa nazywana wygładzaniem. Pojęcie wygładzania danych powstało w związku z opracowywaniem danych statystycznych, gdzie zagadnienie zależności funkcyjnej bywa drugorzędne z uwagi na probabilistyczny charakter analizowanego zjawiska. Tam też powstały pojęcia ruchomych median i ruchomych średnich [6, 13]. Wszystkie metody wygładzania i aproksymacji będą powodowały większe lub mniejsze błędy przebiegów. Jest oczywiste, że największe błędy będzie powodowała ruchoma średnia. W związku z tym, tam gdzie w oparciu o dane statystyczne są analizowane trendy, opracowano wielką liczbę metod wygładzania danych niepowodujących deformacji przebiegów [13], przez co na ogół rozumie się nieistotność wnoszonych błędów. Obecnie są znane bardziej zaawansowane metody estymacji funkcji regresji [2]. Ralston określił pojęcie wygładzania w ten sposób, że jeżeli przybliżenie zachowuje informacje o funkcji wynikające z pomiarów, a zacierza zakłócenia, to mówi się, że wygładza (wyrównuje) dane pomiarowe [14].

Ogólnie biorąc, podstawą wygładzania jest przekonanie o zerowej wartości średniej zakłóceń, co będzie spełnione, jeżeli są to zakłócenia losowe lub oscylujące wokół położenia średniego (równowagi) w dostatecznie szerokim przedziale uśredniania, np. swobodne (bez strat) oscylacje okresowe.

APROKSYMACJA I WYGŁADZANIE RUCHOMYMI FUNKCJAMI SWOBODNYMI

Opracowując systemy diagnostyczne dla tłokowych silników okrętowych, napotkano potrzebę wyznaczenia maksymalnej wartości pochodnej ciśnienia spalania w czasie rzeczywistym. Wobec oczywistości spostrzeżenia, że błąd przybliżenia

będzie tym mniejszy, im mniejszy będzie przedział aproksymacji, zdecydowano się na przybliżenie przebiegu w dostatecznie małym przedziale ruchomymi swobodnymi wycinkami wielomianów potęgowych [7, 9, 10, 11], co dla odróżnienia nazwano metodą aproksymacji ruchomymi funkcjami swobodnymi (*RFSw*). W metodzie *RFSw* w każdym kolejnym kroku (przedziale danych) i jest dokonywana aproksymacja średniokwadratowa i wyznaczane są nowe współczynniki wielomianu z warunku minimum funkcjonału:

$$\text{MIN}(S_i) = \text{MIN} \left(\sum_{i-k}^{i+k} (\tilde{y}_i - \hat{y}_i)^2 \right). \quad (4)$$

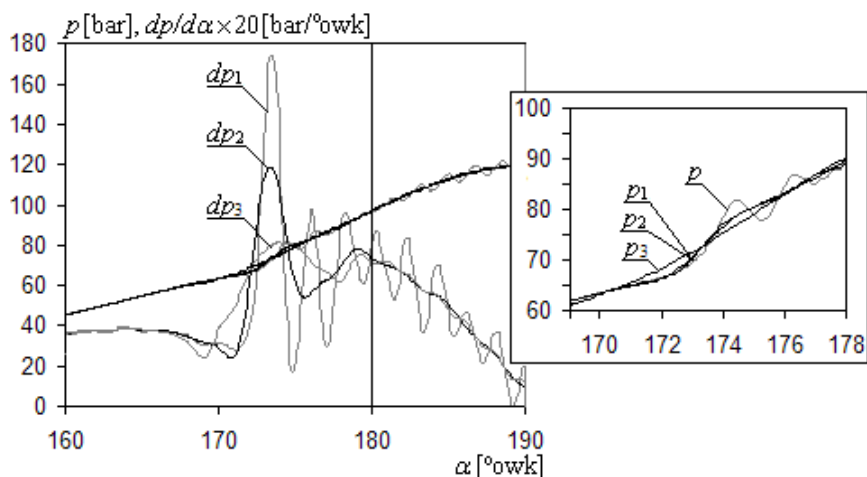
W każdym punkcie i jest wyznaczana wartość przebiegu wygładzonego, wartość jego pochodnej, a w razie potrzeby także wartość pochodnej drugiego rzędu. Przyjęcie symetrycznego przedziału aproksymacji $[-k, k]$ daje uproszczenie algorytmu obliczeniowego. Taki sposób postępowania jest możliwy tam, gdzie próbkowanie wartości wielkości odbywa się z jednakowym okresem (pomiarów z węzłami równoległymi), co jest charakterystyczne dla prawie wszystkich pomiarów wykonywanych automatycznie. Opracowanie algorytmów dla obróbki przebiegów zmierzonych ze zmiennym okresem próbkowania może nastroić trudności jedynie natury formalnej.

Należy zauważyć, że wobec założenia węzłów równoległych pominięta w zapisach wzorów oś argumentów X przekształcono następująco:

$$x_i = \frac{X_i - X_0}{\Delta X}, \quad (5)$$

gdzie ΔX – rozdzielczość osi argumentów (rozdzielczość próbkowania).

Dla zobrazowania skuteczności poszczególnych metod aproksymacji w pracy posłużono się fragmentem wykresu indykatorowego p (rys. 1.) silnika średnioobrotowego 6AL20/24, zmierzonego w cylindrze przy obciążeniu nominalnym ($n = 750 \text{ min}^{-1}$).



Rys. 1. Porównanie przebiegów pochodnych $dp/d\alpha$ (dp) wyznaczonych za pomocą ruchomych wielomianów 3. stopnia (metoda *RFSw*):
 p_1, dp_1 – wynik bezpośredniej aproksymacji p ($k = 18$);
 p_2 – wynik aproksymacji p_1 ($k = 18$);
 dp_2 – wynik aproksymacji p_2 ($k = 18$),
 p_3, dp_3 – wyniki bezpośredniej aproksymacji p dla $k = 54$

Zakłócenia widoczne na przebiegu ciśnienia p są następstwem oddziaływania krótkiego (10 mm) kanału gazowego znajdującego się między czołem czujnika a przestrzenią roboczą cylindra. W analizie wykresów indykatorowych do głównych wyznaczanych wielkości należą: pole powierzchni pod krzywą p (w dziedzinie drogi tłoka), pochodna, kąt samozapłonu, a niekiedy pochodne ciśnienia rzędu drugiego i trzeciego. Jakość uzyskanego przebiegu pochodnej ciśnienia rzędu pierwszego decyduje o poprawności wyznaczenia przebiegu intensywności wywiązywania się ciepła, która to krzywa ma podstawowe znaczenie w analizie procesów roboczych silników tłokowych. Przypadek przebiegu ciśnienia p pokazany na rysunku 1. należy do najtrudniejszych z punktu widzenia wyznaczania powyższych wielkości.

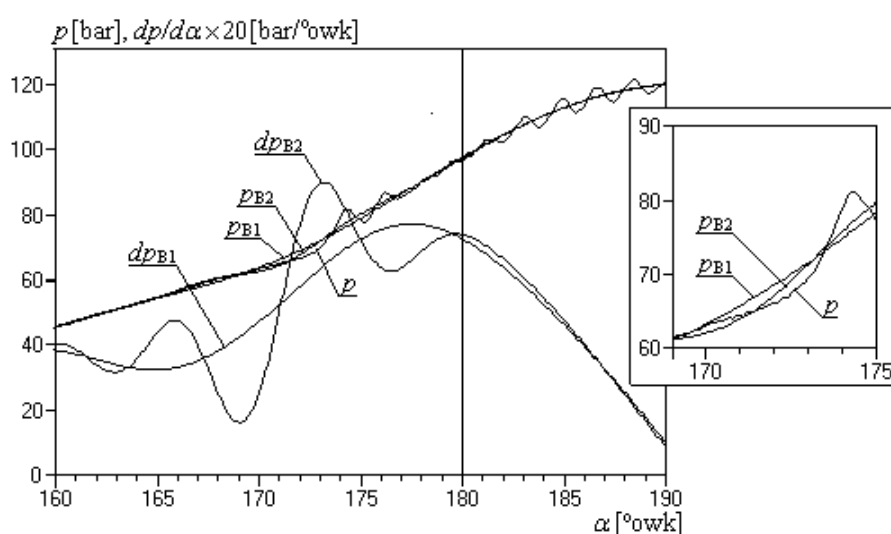
Pochodne dp pokazane na rysunku 1. wyznaczono, stosując ruchomy wielomian 3. stopnia. Przebieg ciśnienia p_1 i pochodną dp_1 wyznaczono dla $k = 18$ (przedział aproksymacji $3,6^\circ\text{owk}$). Przebieg wygładzony p_2 otrzymano z wyniku ponownej aproksymacji p_1 ($k = 18$). Pochodną dp_2 otrzymano aproksymując p_2 także z $k = 18$. Przebieg p_3 i pochodną dp_3 wyznaczono dla $k = 54$.

Jak wynika z porównania przebiegów na rysunku 1., zastosowanie trzykrotnej aproksymacji dało bardziej gładki przebieg pochodnej dp_2 i z mniejszymi błędami

dami amplitudowymi oraz fazowymi niż w przypadku pochodnej dp_3 wyznaczonej na bazie tego samego przedziału aproksymacji, lecz stosując bezpośrednią aproksymację.

BŁĘDY WYGŁADZANIA FUNKCJAMI SKLEJANYMI

Dla porównania właściwości metody *RFSw* z właściwościami metody całopredziałowej aproksymacji funkcjami sklejanymi (giętymi) w pracy posłużono się algorytmem całopredziałowej aproksymacji bazowymi funkcjami sklejanymi 3. stopnia (*BFSk*), opartym na kryterium najmniejszych kwadratów z wyznaczaniem pochodnych pierwszego i drugiego rzędu, opracowanym przez M. Zellmę [12] w ramach zakończonej pracy badawczej nr 9T12D002.



Rys. 2. Przykład wystąpienia znacznych oscylacji pochodnej ciśnienia p wygładzonego całopredziałowymi funkcjami sklejanymi 3. stopnia:
 p_{B1} , p_{B2} – przebiegi ciśnienia wygładzone funkcjami sklejanymi dla $B_1 = 60$ i $B_2 = 120$;
 dp_{B1} , dp_{B2} – pochodne $dp/d\alpha$ wyznaczone z przebiegów p_{B1} i p_{B2} odpowiednio

Obecnie gotowe programy do obróbki danych pomiarowych funkcjami sklejanymi bywają dołączane do wydawnictw książkowych z obróbki danych [3].

W metodzie *BFSk* przebieg ciśnienia za pełny obrót wału korbowego jest dzielony na B baz (odcinków) i w węzłach (punkty podziału) definiowane są więzy w postaci warunków ciągłości funkcji aproksymujących i jej pochodnych.

Pokazane na rysunku 2. przebiegi pochodnej dp wyznaczono dla dwóch różnych podziałów bazowych: pochodną dp_{B1} wyznaczono dla podziału przedziału kąтового wykresu indykatorowego (360° owk) na $B = 60$ baz, co odpowiada przedziałowi kątowemu bazy wynoszącemu 6° owk, dp_{B2} wyznaczono dla $B = 120$ (3° owk).

W każdym z przykładów uzyskano znaczne wygładzenie przebiegu indykatorowego, lecz jak widać na rysunku 2., przed punktem samozapłonu występują silne zafalowania pochodnych, co zostało wymuszone przez oddziaływanie więzów nałożonych w węzłach baz.

Dalsze zwiększanie liczby baz B ogranicza zafalowania niskoczęstotliwościowe przebiegów pochodnych, lecz następuje coraz silniejszy wpływ zakłóceń wysokoczęstotliwościowych, czego nie pokazano ze względu na słabą czytelność takiego rysunku.

Porównując przebieg dp_3 (rys. 1.) z przebiegami dp_{B1} i dp_{B2} (rys. 2.), łatwo zauważyć, że całopredziałowe wygładzanie funkcjami sklejanymi może prowadzić do istotnych deformacji kształtu, chociażby w postaci wygładzenia (uśrednienia) szczytu pochodnej ciśnienia występującego po punkcie samozapłonu. Zniekształcenia przebiegów mogą nie zostać zauważone na wykresach czystego sprężania lub na dostatecznie gładkich wykresach indykatorowych, np. niektórych silników samochodowych czy okrętowych.

METODA RUCHOMYCH FUNKCJI ŁĄCZONYCH

Jak wynika z przytoczonego wyżej przykładu, metoda *BFSk* może wносить poważne błędy z tytułu wpływu więzów i korzystania z informacji zawartej w zbyt dużym przedziale. Przy tym metoda *BFSk* jest znacznie bardziej czasochłonna w porównaniu z metodą *RFSw* i jej czasochłonność wzrasta gwałtownie wraz ze zwiększaniem liczby baz. Wpływ więzów i szerokości przedziałów można ograniczyć, dzieląc przebieg na swobodne wycinki (bazy) i zwiększając ich liczbę, co w konsekwencji prowadzi do aproksymacji obiektami ruchomymi.

Aproksymacja ruchomymi funkcjami sklejanymi – metoda *RFSk*

Tak jak w przypadku metody *RFSw*, podstawową cechą ruchomej aproksymacji funkcjami sklejanymi jest generowanie jednego punktu aproksymacji w każdym jej kroku. Ruchome obiekty aproksymujące są zbudowane z połączonych wycinków funkcji (baz) analogicznie jak w przypadku całoprzedziałowym. Słowo sklejanie sugeruje nadanie powstałemu obiektowi ciągłości i zarazem elastyczności w miejscach połączeń odcinków funkcji. W rzeczywistości w węzłach obiektu występuje uogólniony brak ciągłości lub uogólnione łamanie krzywej. Pod pojęciem uogólnione należy rozumieć to, że nieciągłości lub łamanie (ostrza) dotyczą nie tylko wartości funkcji, lecz także jej pochodnych. Jest oczywiste, że najmniej jeden z parametrów w węzle musi być nieciągły, inaczej będzie to ta sama krzywa.

W przypadku sklejenia (złączenia) r członów (wycinków) funkcji o liniowych współczynnikach, warunek minimum funkcjonału dla i -tego położenia ruchomego obiektu sklejanego można zapisać następująco:

$$MIN(S_i) = MIN \left(\sum_{j=1}^{j=r} \sum_{i=l_j}^{i=p_j} (\tilde{y}_{ji} - \hat{y}_{ji})^2 \right), \quad (6)$$

gdzie: l_j, p_j – lewe i prawe krańce przedziału wycinka j .

Najczęściej przyjmuje się $l_{j+1} = p_j + 1$, co oznacza wykorzystanie wszystkich danych w przedziale aproksymacji, i przy tym jednokrotne. Z wielu względów krańce te mogą być dobierane inaczej, jak i nie wszystkie punkty pomiarowe mogą być wykorzystywane do aproksymacji.

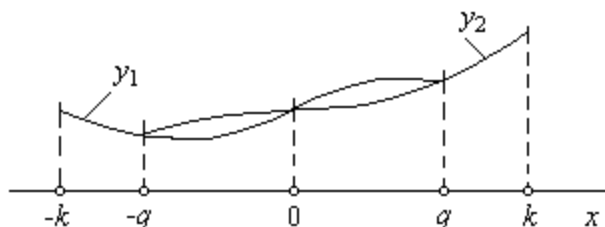
W węzłach połączeń sklejanych są nakładane więzy w postaci: $y = idem$, $y' = idem$, $y'' = idem$ itd., z zachowaniem znanych warunków co do liczby tych więzów, z uwagi na istnienie rozwiązań układu równań aproksymacji.

Aproksymacja ruchomymi funkcjami nitowanymi

Oprócz czołowego łączenia wycinków, funkcji można je łączyć zakładkowo i nitować, nadając im na ogół odmienne właściwości aproksymujące niż w przypadku funkcji sklejanych. Nitować można zarówno funkcję, jak i jej pochodne. W wielu przypadkach, jeżeli są spełnione odpowiednie warunki, pomimo połączenia zakładkowego, uzyskany obiekt może być tożsamy z odpowiednim obiektem sklejanym lub też sprowadzać się do jednakowej postaci we wszystkich znitowanych przedzia-

łach (przesztywnienie). Cechą odróżniającą ten sposób łączenia od klasycznego sklejanego jest przekrywanie się przedziałów wycinków funkcji w miejscu ich połączenia (sklejania).

Na rysunku 3. pokazano schemat prostego obiektu zbudowanego z dwóch wycinków funkcji y_1, y_2 zachodzących na siebie i znitowanych w punktach $-q, 0, q$.



Rys. 3. Schemat ruchomego obiektu aproksymującego złożonego z dwóch znitowanych w trzech punktach wycinków funkcji y_1 i y_2

Jeżeli przyjąć, że w rozpatrywanym przykładzie wycinki funkcji y_1 i y_2 są także wielomianami potęgowymi trzeciego stopnia oraz więzy zostały zadane następująco:

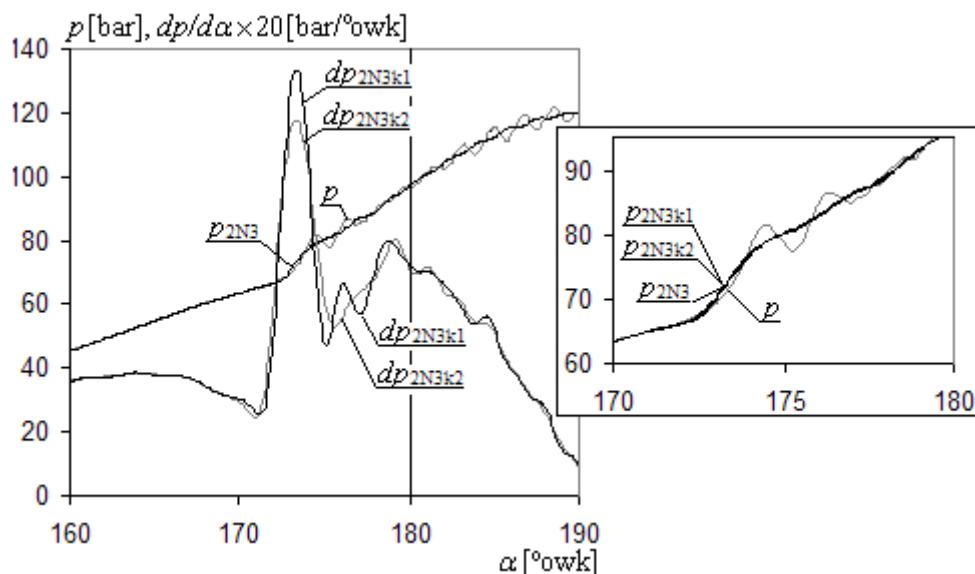
$$y_1'(-q) = y_2'(-q), y_1(0) = y_2(0), y_1'(q) = y_2'(q), \quad (7)$$

to układ równań opisujących ten obiekt może mieć następującą postać:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_1 + b_1x + c_1x^2 + d_1x^3, \\ y_2 &= a_1 + b_1(x + (3q)^{-2}x^3) + c_1x^2 + d_1x^3 - b_2(3q)^{-2}x^3. \end{aligned} \quad (8)$$

Jak wynika z układu równań (8), dla wyznaczenia wartości funkcji w punkcie 0 wystarczy wyznaczyć wartość współczynnika a_1 , a dla wyznaczenia wartości pochodnej w tym punkcie wartość współczynnika b_1 . Znane jest ogólne rozwiązanie macierzowe zagadnienia liniowego z więzami [1], lecz dla tak prostych przypadków jak ruchome obiekty aproksymujące jego stosowanie nie wydaje się być celowe, z uwagi na złożoność tego rozwiązania.

Na rysunku 4. pokazano wyniki wygładzania ciśnienia p , stosując 2-odcinkowy obiekt nitowany 3. stopnia z więzami (7).



Rys. 4. Wyniki wygładzania przebiegu ciśnienia p za pomocą dwubazowego ruchomego obiektu nitowanego 3. stopnia:
 p_{2N3} – przebieg wygładzony obiektem nitowanym dla $k = 17$, $q = 9$;
 dp_{2N3k1} , dp_{2N3k2} – przebiegi pochodnych wyznaczone z przebiegu p_{2N3}
za pomocą ruchomego wielomianu 4. stopnia dla dwóch wartości k : $k_1 = 20$, $k_2 = 25$;
 p_{2N3k1} , p_{2N3k2} – przebiegi ciśnienia będące efektem wygładzania przebiegu p_{2N3}
przez wielomian 4. stopnia

Jak wynika z porównania przebiegów pochodnych dp_{2N3k1} i dp_{2N3k2} , stosując prosty obiekt nitowany, uzyskano dużą gładkość przebiegu i jego pochodnych. Porównanie przebiegu p_{2N3} z przebiegami p_{2N3k1} , p_{2N3k2} pokazuje, że dalsze wygładzanie wniesione przez ruchomy wielomian 4. stopnia nie jest istotne. Wielomian ten został wykorzystany do wyznaczenia pochodnych z przebiegu wygładzonego p_{2N3} . Istnieją duże możliwości konstruowania różnorodnych obiektów nitowanych o różnych właściwościach wygładzających. Natomiast odpowiedzi na pytanie, do jakiego stopnia wygładzać, należy szukać w naturze fizycznej zjawiska.

Ruchome obiekty łączone ze współczynnikami dla pochodnych

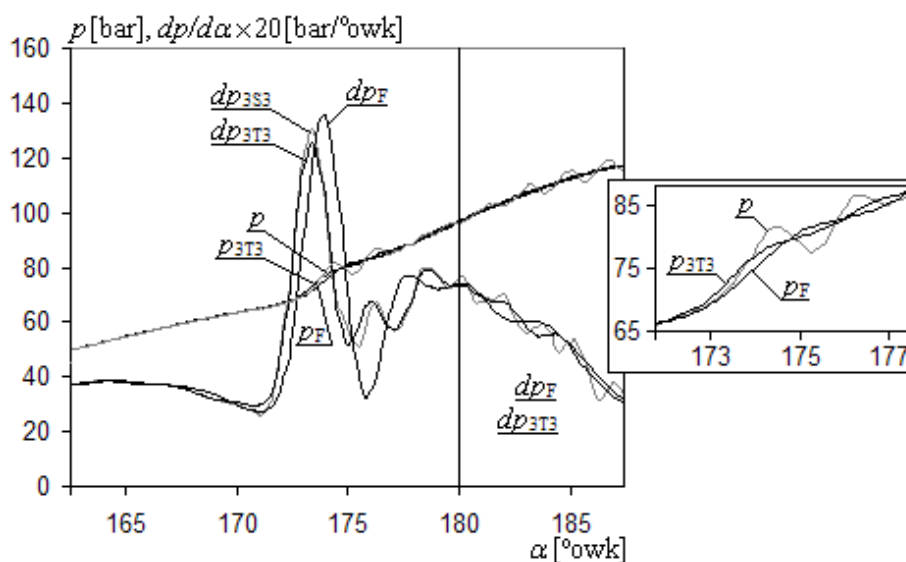
Kolejną metodą nadania specjalnych cech ruchomemu obiektowi aproksymującemu jest wprowadzenie współczynników dla pochodnych, które służą do zmiany znaku i wzmacniania (tłumienia) pochodnych w miejscach połączeń wycinków funkcji tworzących obiekt. Powstałe w ten sposób funkcje są funkcjami łamanymi (giętymi). Zagadnienie to można łatwo objaśnić na przykładzie trójczło-

nowego obiektu sklejanego z wielomianów trzeciego stopnia, wprowadzając współczynniki w_1, w_2, w_3 w węzłach $-q$ i q w sposób następujący:

$$\begin{aligned} y_1'(-q) &= w_1 y_2'(-q), y_3'(q) = w_1 y_2'(q), \\ y_1''(-q) &= w_2 y_2''(-q), y_3''(q) = w_2 y_2''(q), \\ y_1'''(-q) &= w_3 y_2'''(-q), y_3'''(q) = w_3 y_2'''(q). \end{aligned} \quad (9)$$

Postać końcowa równań obiektu aproksymującego jest dość złożona, lecz sam algorytm obliczeniowy jest stosunkowo prosty. Autor opracował wiele tego rodzaju obiektów, do piątego rzędu włącznie, dla ich wykorzystania do obróbki i analizy wykresów indykatorowych i przebiegów drgań. W przypadku stosowania obiektów, które mają zadanie wygładzania wstępnego, dla wyznaczenia pochodnych po wygładzaniu stosowana jest aproksymacja obiektami prostymi.

Na rysunku 5. porównano przebiegi pierwszych pochodnych ciśnienia p wyznaczonych trzema metodami.



Rys. 5. Porównanie stopnia wygładzenia przebiegu ciśnienia i przebiegi pochodnych wyznaczone trzema metodami:
 p_F – przebieg wygładzony metodą analizy falkowej;
 dp_F – pochodna wyznaczona z przebiegu p_F , stosując ruchomy wielomian 5. stopnia;
 p_{3S3}, dp_{3S3} – przebiegi uzyskane, stosując trójbazowy wielomian sklepany 3. stopnia;
 dp_{3T3} – przebieg uzyskany, stosując trójbazowy wielomian sklepany 3. stopnia z wagami dla pochodnych

Przybliżenie przebiegu ciśnienia p_F zostało uzyskane z przebiegu p przez H. Wysockiego, w ramach realizowanej wspólnie pracy badawczej 0 T00B 032 24, metodą dekompozycji i syntezy falkowej z wykorzystaniem pakietu Wavelet Explorer i programu Mathematica.

Przebieg p_{3T3} otrzymano z krzywej p za pomocą ruchomego obiektu zbudowanego z trzech sklejonych wycinków wielomianów potęgowych 3. stopnia ($k = 8$, $q = 3$) z wagami w węzłach dla pochodnych 1 i 2. Pochodną dp_F uzyskano, aproksymując przebieg p_F ruchomym wielomianem 5. stopnia ($k = 20$). Pochodną dp_{3T3} uzyskano, aproksymując krzywą p_{3T3} wielomianem 3. stopnia ($k = 19$). Pochodną dp_{3T3} uzyskano, stosując ruchomy obiekt sklejany 3. stopnia (sklejono pochodne) o parametrach: $k = 30$, $q = 14$.

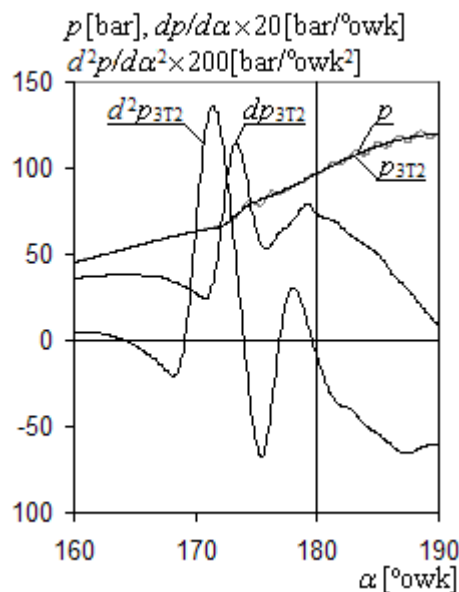
W obszarze początku spalania jest widoczna znacząca różnica w dynamice przebiegów p_F i p_{3T3} , co rzutuje na przebiegi pochodnych. Pochodna dp_F charakteryzuje się pewnym opóźnieniem i znacznym spadkiem wartości po pierwszym szczycie w porównaniu z pochodną p_{3T3} . Poza tym obszarem występuje znaczna zbieżność przybliżeń otrzymanych obydwoma metodami. Szczegółowa analiza przebiegów wymagałaby sięgnięcia do istoty fizycznej problemu, co wykracza poza ramy prezentowanej pracy.

Należy podkreślić, że przykłady zamieszczone w pracy mają na celu objaśnienie omawianych metod aproksymacji i nie dobierano tutaj obiektów w aspekcie optymalnej obróbki przykładowego przebiegu p . Podane przykłady nie wyczerpują możliwości wygładzających obiektów aproksymujących.

PRZYKŁADY ZASTOSOWAŃ

Wyznaczanie pochodnych wyższych rzędów

Wyznaczając pochodne wyższych rzędów należy się liczyć z wzrastającym wpływem zakłóceń. Przykład wyznaczenia pochodnej drugiego rzędu ciśnienia p z wykorzystaniem prostego obiektu aproksymującego pokazano na rysunku 6.



Rys. 6. Przykład wyznaczenia pochodnych ciśnienia p z zastosowaniem prostego ruchomego obiektu aproksymującego:
 p_{3T2} – przebieg ciśnienia wygładzony obiektem sklejanym z 3 wielomianów 2. stopnia ze współczynnikami dla pochodnych;
 dp_{3T2} – pochodna otrzymana z p_{3T2} , stosując ruchomy wielomian 2. stopnia;
 d^2p_{3T2} – pochodna drugiego rzędu przebiegu p otrzymana w wyniku aproksymacji krzywej dp_{3T2} za pomocą ruchomego wielomianu 2. stopnia

Wygładzony przebieg ciśnienia p_{3T2} uzyskano, stosując obiekt sklepany z 3 wielomianów 2. stopnia o parametrach: $k = 30$, $q = 5$, $w_1 = 8$, $w_2 = -12$. Pochodną dp_{3T2} uzyskano w wyniku aproksymacji krzywej p_{3T2} , stosując ruchomy wielomian 2. stopnia ($k = 10$). Pochodna drugiego rzędu d^2p_{3T2} jest wynikiem aproksymacji pochodnej dp_{3T2} za pomocą ruchomego wielomianu 2. stopnia ($k = 30$).

Jak widać na rysunku 6., uzyskano dostatecznie gładki przebieg pochodnej drugiego rzędu. Może być on jednak obciążony nadmiernymi błędami amplitudowymi i fazowymi. Znajomość przebiegu pochodnej drugiego rzędu jest najczęściej potrzebna dla wyznaczania położenia jej pierwszego, licząc od DMP (dolne martwe położenie) tłoka, punktu zerowego (rys. 6.), który jest uważany za punkt odniesienia GMP (górne martwe położenie) tłoka. W takim przykładzie dobierając obiekt aproksymujący, należy skupić uwagę na minimalizowaniu błędu kąтового położenia tego punktu.

Obliczanie powierzchni pod aproksymującą krzywą

Sposób obliczania powierzchni pod krzywą, przybliżoną z wykorzystaniem ruchomego obiektu aproksymującego, jest oczywisty. Ponieważ wartości funkcji jak i jej pochodnej w następstwie ruchomej aproksymacji są wyznaczane w punktach, to wartości całek mogą być także wyznaczane w analogiczny sposób.

W przykładzie danym układem równań (8) powierzchnia elementarnego pola dla rozpatrywanego punktu i wynosi:

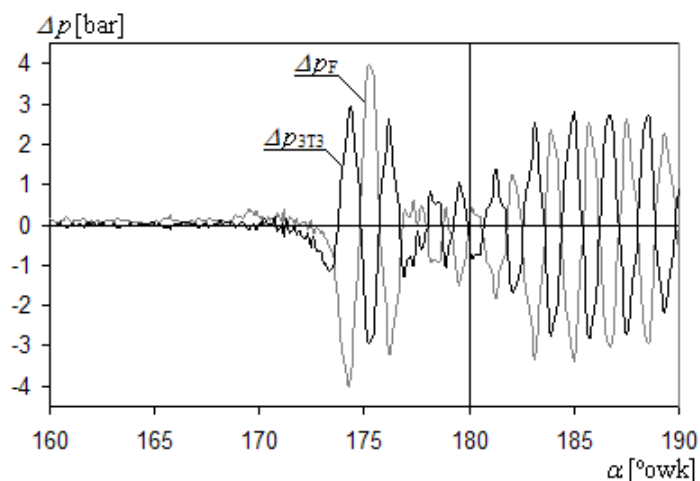
$$A_i = \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (y_{1i} + y_{2i}) dx = a_{1i} + \frac{1}{12} c_{1i}. \quad (10)$$

W celu obliczenia pola powierzchni w zadanym przedziale wystarczy zsumować powierzchnie pól elementarnych w tym przedziale, zwracając uwagę na błędy wnoszone na końcach przedziału całkowania oraz pamiętając o dokonanej transformacji osi X . Nietrudno zauważyć, że jeżeli w celu obliczenia powierzchni pola elementarnego przyjąć granice całkowania 0 i 1, to znajdzie potrzeba wyznaczania wszystkich współczynników występujących w układzie równań (8). Tak obliczone pola elementarne można sumować w danym przedziale bez obawy wniesienia błędów na końcach przedziału.

Wyznaczanie przebiegów resztowych

Nie zawsze przedmiotem zainteresowania jest wyłoniony w następstwie aproksymacji (wygładzania) przebieg. Na przykład w diagnostyce interesujące są często zakłócenia przebiegu podstawowego, stanowiąc źródło informacji diagnostycznej. Nawet w rozpatrywanym przypadku zakłócenia w postaci oscylacji mogą stanowić źródło informacji, np. o czystości kanału gazowego.

Na rysunku 7. porównano fragmenty dwóch przebiegów resztowych uzyskanych dwiema, wyżej zaprezentowanymi, metodami. Przebiegi resztowe otrzymano, odejmując od wyjściowego przebiegu ciśnienia p krzywe p_F i p_{3T3} pokazane na rysunku 5., uzyskane w wyniku analizy falkowej i ruchomej aproksymacji.



Rys. 7. Porównanie przebiegów resztowych odchylen przebiegu wyjściowego p od przebiegów wygładzonych p_F i p_{3T3} (rys. 4.):

$$\Delta p_F = p - p_F, \Delta p_{3T3} = p - p_{3T3}$$

Jak widać na rysunku 7., odchylenia są porównywalne, a wystąpiła jedynie różnica fazowa oscylacji. Jeszcze raz należy podkreślić, że podane przykłady miały na celu jedynie zobrazowanie istoty i możliwości obróbki poszczególnych metod, a nie dokonanie analizy i interpretacji przebiegu p . Przebiegi resztowe można poddawać dalszej aproksymacji obiektami ruchomymi w celu ich rozdzielenia na składowe o określonych cechach.

PODSUMOWANIE I WNIOSKI

W sytuacji, kiedy postać modelu reprezentowanego przez dane pomiarowe nie jest znana, celowy jest podział przedziału aproksymacji, a w szczególności zastosowanie ruchomego przedziału aproksymacji.

Istotą ruchomego wygładzania i aproksymacji jest przybliżenie funkcji opisującej dane pomiarowe w kolejnym jednym punkcie kolejnego przedziału aproksymacji.

Ograniczenie szerokości przedziałów aproksymacji i aproksymacja ruchoma prowadzą do korzystania z lokalnej informacji pomiarowej, co w sytuacji nieznaności struktury modelu zabezpiecza przed wpływem na wynik aproksymacji danych opisywanych odmiennym modelem.

Właściwości obiektów ruchomych można kształtować przez:

- dobór rodzaju funkcji aproksymujących i wygładzających;
- dobieranie szerokości przedziałów wycinków funkcji;
- łączenie wycinków funkcji, zadając odpowiednie więzy: sklejanie, nitowanie;
- stosowanie współczynników załamania (gięcia) dla zmian znaku i wzmacniania pochodnych w węzłach;
- aproksymację wielokrotną (rekurencyjną).

Nie brano pod uwagę możliwości zastosowania wag w odniesieniu do odchyleń w punktach.

Ruchome obiekty aproksymujące mogą być wykorzystywane do wyznaczania wartości, pochodnych i całek funkcji opisujących dane pomiarowe. W szczególności przedmiotem analiz mogą być przebiegi resztowe odchyleń wyznaczane po danym etapie aproksymacji. Wykonując aproksymację wielokrotną, można wyłonić przebiegi resztowe o określonych cechach (filtracja).

Obiekty te muszą być konstruowane odpowiednio do warunków rozwiązywanego zagadnienia. Zaprezentowane metody aproksymacji mogą okazać się w wielu przypadkach wystarczające do wykonania odpowiedniego programu z wykorzystaniem powszechnie dostępnego oprogramowania, jak np. program Excel.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Brandt S., *Analiza danych. Metody statystyczne i obliczeniowe*, PWN, Warszawa 1999.
- [2] Gajek L., Kałużka M., *Wnioskowanie statystyczne. Modele i metody*, WNT, Warszawa 2000.
- [3] Kosma Z., *Metody numeryczne dla zastosowań inżynierskich*, Politechnika Radomska, Radom 1999.
- [4] Maćkowiak J., Szopa R., *Analiza metod aproksymujących dyskretnie zarejestrowany przebieg ciśnienia spalania*, „Silniki Spalinowe”, 1992, nr 3 – 4.
- [5] McCracken D. D., Dorn W. S., *Numerical Methods and Fortran Programming*, John Wiley and Sons, 1965 (tłum. ros. 1977).
- [6] Mosteller F., Tukey J. W., *Data Analysis and Regression*, Addison-Wesley Publishing Company, 1979 (tłum. ros. 1982).

- [7] Polanowski S., *Aproksymacja nadążna przebiegu ciśnienia spalania i generowanie pochodnych i całek*, „Journal of KONES”, 1996.
- [8] Polanowski S., *Aproksymacja najmniejszych kwadratów funkcjami ruchomymi w zastosowaniu do analizy wykresu indykatorowego*, Matematyczne Sympozjum Naukowe SILWOJ 2003.
- [9] Polanowski S., *Determination of the Peak Value of a Cylinder Pressure Rate by Means of the Follow-up Approximation or Basic Splines*, „Machine Dynamics Problems”, 1999, Vol. 23, No 4.
- [10] Polanowski S., *Following Approximation of Cylinder Pressure Run and Generation of Derivatives and Integrals*, „Journal of Polish CIMAC”, Warszawa 1996.
- [11] Polanowski S., *Szybka obróbka wykresu indykatorowego do celów kontroli i sterowania*, Matematyczne III Sympozjum Naukowe EKODIESEL '96, Warszawa 1966.
- [12] Polanowski S., Zelma M., *The peak value determination of cylinder pressure rate with the basic splines or follow-up approximation*, materiały konferencyjne KONES '97.
- [13] Pollard J. H., *A Handbook of numerical and Statistical Techniques*, Cambridge University Press, 1977 (tłum. ros. 1982).
- [14] Ralston A., *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN, Warszawa 1983.

ABSTRACT

The paper uses indicator processing diagram to present methods worked out for smoothing and approximating measurement processes employed in the moving approximating objects developed by the author. It discusses approximation and smoothing by means of moving free functions, glued and riveted without and with dumping derivatives and multiple approximation (smoothing). It shows errors in all-range smoothing by means of glued functions. The examples show that the simple methods presented allow for obtaining results analogous to the ones obtained with complex falc programs. The objects can also be used to generate and analyze residue runs, i.e. in diagnostics.

Recenzent dr hab. inż. Zdzisław Chłopek