

Jan Idzikowski  
Marek Zellma

## IDENTYFIKACJA RÓWNAŃ DYNAMIKI SILNIKA PRĄDU STAŁEGO

### STRESZCZENIE

W artykule przedstawiono możliwości zastosowania bazowych funkcji sklepanych służących identyfikacji równań silnika elektrycznego. Do opisu przebiegów zastosowano bazowe funkcje sklepane stopnia trzeciego.

### WSTĘP

W celu dokonania analizy właściwości dynamicznych zachodzących w układach napędowych z zastosowaniem maszyn elektrycznych oraz ich optymalnego działania niezbędne są modele matematyczne dogodne dla elektronicznej techniki obliczeniowej. Podstawą analizy stanów nieustalonych silników prądu stałego są następujące równania różniczkowe:

- równanie obwodu wzbudzenia

$$R_w i_w(t) + L_w \frac{d i_w(t)}{dt} = U_w(t); \quad (1)$$

- równanie obwodu twornika

$$k_e i_w(t) \omega(t) + R_t i_t(t) + L_t \frac{d i_t(t)}{dt} = U_t(t); \quad (2)$$

- równanie równowagi mechanicznej

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} + M_o(t) = k_m i_w(t) i_t(t), \quad (3)$$

gdzie:  $i_w(t)$  – prąd wzbudzenia;  
 $U_w(t)$  – napięcie wzbudzenia;  
 $R_w, L_w$  – rezystancja i indukcyjność uzwojenia stojana;  
 $i_t(t)$  – prąd twornika;  
 $U_t(t)$  – napięcie twornika;  
 $\omega(t)$  – prędkość kątowna twornika;  
 $R_t, L_t$  – rezystancja i indukcyjność twornika;  
 $k_e$  – indukcyjność wzajemna stojan-wirnik;  
 $M_o(t)$  – moment mechaniczny silnika;  
 $J$  – moment bezwładności układu mechanicznego;  
 $k_m$  – indukcyjność rotacji.

Powyższe równania wyprowadzono, przyjmując szereg założeń upraszczających. Opis stanów przejściowych i parametrów konkretnej maszyny wymaga określenia współczynników występujących w jej równaniach. W artykule tym przedstawimy algorytm identyfikacji układu sterowania obejmujący:

- opis przebiegów  $i_w, u_w, i_t, u_t, \omega(t), M_o(t)$  w postaci funkcji regresji;
- dobór optymalnych współczynników równań (1 – 3);
- weryfikację modelu.

### APROKSYMACJA SYGNAŁÓW ZA POMOCĄ BAZOWYCH FUNKCJI SKLEJANYCH STOPNIA TRZECIEGO

W oparciu o dane pomiarowe

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{w,k} &= \tilde{u}_w(t_k), \tilde{i}_{w,k} = \tilde{i}_w(t_k), \tilde{u}_{t,k} = \tilde{u}_t(t_k), \tilde{i}_{t,k} = \tilde{i}_t(t_k); \\ \tilde{n}_k &= \tilde{n}(t_k), \tilde{M}_k = \tilde{M}(t_k), \quad k \in \overline{0, n_1} \end{aligned}$$

wyznaczymy funkcje regresji

$$\hat{U}_w(t), \hat{i}_w(t), \hat{U}_t(t), \hat{i}_t(t), \hat{M}_o(t), \hat{\omega}(t) \quad (4)$$

opisujące przebiegi rzeczywiste  $U_w(t), i_w(t), U_i(t), i_i(t), M_o(t), \omega(t)$  silnika prądu stałego.

Funkcje (4) przedstawimy w postaci kombinacji liniowych

$$\begin{aligned} \hat{u}_w &= \sum_{i=-1}^{N+1} \alpha_i \Phi_i(t), \quad \hat{i}_w = \sum_{i=-1}^{N+1} \beta_i \Phi_i(t), \\ \hat{u}_i &= \sum_{i=-1}^{N+1} \gamma_i \Phi_i(t), \quad \hat{i}_i = \sum_{i=-1}^{N+1} \delta_i \Phi_i(t), \quad (5) \\ \hat{\omega} &= \sum_{i=-1}^{N+1} \lambda_i \Phi_i(t), \quad \hat{M}_0 = \sum_{i=-1}^{N+1} \eta_i \Phi_i(t); \\ \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i, \lambda_i, \eta_i &\in \mathbf{R}, i \in \overline{-1, N+1} \end{aligned}$$

bazowych funkcji sklepanych stopnia trzeciego

$$\Phi_i(t) = \frac{1}{3!h^4} \begin{cases} 0 & \text{dla } t \leq t_0 + (i-2)h \\ f_1(t) & \text{dla } t_0 + (i-2)h \leq t \leq t_0 + (i-1)h \\ f_2(t) & \text{dla } t_0 + (i-1)h \leq t \leq t_0 + ih \\ f_3(t) & \text{dla } t_0 + ih \leq t \leq t_0 + (i+1)h \\ f_4(t) & \text{dla } t_0 + (i+1)h \leq t \leq t_0 + (i+2)h \\ 0 & \text{dla } t \geq t_0 + (i+2)h \end{cases}, i \in \overline{-1, N+1}, \quad (2)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \tau^3, \quad \tau = t - (t_0 + (i-2)h); \\ f_2(t) &= h^3 + 3h^2\tau + 3h\tau^2 - 3\tau^3, \quad \tau = t - (t_0 + (i-1)h); \\ f_3(t) &= h^3 + 3h^2\tau + 3h\tau^2 - 3\tau^3, \quad \tau = t_0 + (i+1)h - t; \\ f_4(t) &= \tau^3, \quad \tau = t_0 + (i+2)h - t. \end{aligned}$$

Założmy, że przebieg rzeczywisty  $y$ , którym może być  $U_w(t), i_w(t), U_i(t), i_i(t), M_o(t), \omega(t)$  opisany jest funkcją  $y(t)$ . Ponadto zakładamy, że dla każdego  $t$  zmienna losowa  $y(t)$  ma rozkład normalny ze średnią  $\hat{y}$ .

Niech  $\Delta_N$ , gdzie  $N < n - 3$ , będzie układem punktów

$$t_i = t'_0 + ih, h := \frac{t'_n - t'_0}{N}, i \in \overline{0, N}$$

dzielących przedział  $[t'_0, t'_n] = [t_0, t_N]$  na  $N$  podprzedziałów

$$\Delta_n : t_0 < \dots < t_N.$$

Uzpełnimy podział  $\Delta_N$  punktami

$$t_{-i} := t_0 - ih, t_{n+i} := t_0 + ih, i \in \overline{1, 2}.$$

Dalej wyznaczmy funkcję

$$\hat{y} = c_{-1}\Phi_{-1}(t) + c_0\Phi_0(t) + \dots + c_N\Phi_N(t) + c_{N+1}\Phi_{N+1}(t),$$

taką że dla każdego ustalonego  $t_i \in \overline{0, n}$  zmienna losowa  $y_i$  ma rozkład normalny ze średnią

$$\hat{y}_i = c_{-1}\Phi_{-1}(t_i) + c_0\Phi_0(t_i) + \dots + c_N\Phi_N(t_i) + c_{N+1}\Phi_{N+1}(t_i)$$

i odchyleniem standardowym  $\sigma$ , gdzie  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $i \in \overline{-1, N+1}$ . Ponadto zakładamy, że zmienne  $y_i$  są zmiennymi niezależnymi.

Optymalne współczynniki  $c_i^0$ ,  $i \in \overline{-1, N+1}$  wyznaczmy metodą największej wiarygodności.

Zagadnienie doboru optymalnych współczynników  $c_i^0$ ,  $i \in \overline{-1, N+1}$  sprowadza się do rozwiązania równania macierzowego:

$$\mathbf{B}\mathbf{C} = \mathbf{G}, \tag{6}$$

gdzie:  $\mathbf{B} = \left[ \sum_{k=0}^n \Phi_i(t'_k)\Phi_j(t'_k) \right]_{(N+3) \times (N+3)}$  ;

$$\mathbf{C} = [c_i]_{(N+3) \times 1}; \quad \mathbf{G} = \left[ \sum_{k=0}^n \tilde{y}_k \Phi_i(t'_k) \right]_{(N+3) \times 1}; \quad i, j \in \overline{-1, N+1}.$$

Macierz  $\mathbf{B}$  jest macierzą wstęgową 7-diagonalną.

Niech

$$\begin{aligned}\lambda_i &= \sum_{k=0}^n \Phi_i(t'_k) \Phi_{i+1}(t'_k), \quad i \in \overline{-1, N+1}; \\ \mathcal{G}_i &= \sum_{k=0}^n \Phi_i(t'_k) \Phi_{i+1}(t'_k), \quad i \in \overline{-1, N}; \\ \eta_i &= \sum_{k=0}^n \Phi_i(t'_k) \Phi_{i+1}(t'_k), \quad i \in \overline{-1, N-1}; \\ \zeta_i &= \sum_{k=0}^n \Phi_i(t'_k) \Phi_{i+1}(t'_k), \quad i \in \overline{-1, N-2}; \\ g_i &= \sum_{k=0}^n \tilde{y}(t'_k) \Phi_{i+1}(t'_k), \quad i \in \overline{-1, N+1}.\end{aligned}$$

Rozwiązanie **C** równania (6) można wyznaczyć rekurencyjnie wg wzorów:

$$\begin{aligned}z_i &= g_i - z_{i-1}p_{i-1} - z_{i-2}q_{i-2} - z_{i-3}r_{i-3}, \quad i \in \overline{-1, k+1}; \\ c_i &= \frac{z_i}{w_i} - c_{i+3}r_i - c_{i+2}q_i - c_{i+1}p_i, \quad i \in \overline{k+1, -1},\end{aligned}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}w_i &= \lambda_i - w_{i-1} + p_{i-1}^2 - w_{i-2}q_{i-2}^2 - w_{i-3}r_{i-3}^2; \\ p_i &= \frac{1}{w_i} (g_i - w_{i-1}p_{i-1}q_{i-1} - w_{i-2}q_{i-2}r_{i-2}); \\ q_i &= \frac{1}{w_i} (\eta_i - w_{i-1}p_{i-1}r_{i-1}); \\ r_i &= \frac{\zeta_i}{w_i};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}i \in \overline{-1, N+1}; \quad p_{i-2} = 0; \quad q_i = 0 \text{ dla } i \in \overline{-3, -2}; \quad r_i = 0 \text{ dla } i \in \overline{-4, -2}; \\ \zeta_i = 0 \text{ dla } i \in \overline{N-1, N+1}; \quad \eta_i = 0 \text{ dla } i \in \overline{N, N+1}; \quad \mathfrak{G}_{N+1} = 0.\end{aligned}$$

### IDENTYFIKACJA PARAMETRÓW SILNIKA

Optymalne współczynniki  $R_w, L_w, R_t, L_t, k_e, k_m$  równań (1 – 3) wyznaczmy poprzez minimalizację błędów równań (wskaźników identyfikacji):

$$\begin{aligned}
 J(R_w, L_w) &= \| R_w \hat{i}_w(t) + L_w \frac{d\hat{i}_w(t)}{dt} - \hat{u}_w(t) \| = \sqrt{\int_{t_0}^{t_{n_1}} [R_w \hat{i}_w(t) + L_w \frac{d\hat{i}_w(t)}{dt} - \hat{u}_w(t)]^2 dt} ; \\
 J(R_t, L_t) &= \| R_t \hat{i}_t(t) + L_t \frac{d\hat{i}_t(t)}{dt} - k_e \hat{i}_w(t) \hat{\omega}(t) - \hat{u}_t \| = \\
 &= \sqrt{\int_{t_0}^{t_{n_1}} [R_t \hat{i}_t(t) + L_t \frac{d\hat{i}_t(t)}{dt} - k_e \hat{i}_w(t) \hat{\omega}(t) - \hat{u}_t]^2 dt} ; \\
 J(J, k_m) &= \| J \frac{d\hat{\omega}(t)}{dt} - k_m \hat{i}_t(t) \hat{i}_w(t) - \hat{M}_o(t) \| \quad ,
 \end{aligned}$$

gdzie  $\|\cdot\|$  jest normą indukowaną przez iloczyn skalarny  $(\cdot|\cdot)$  w przestrzeni Hilberta  $L^2([t_0, t_{n_1}], \mathbf{R}^1)$ , której elementami są funkcje  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $[t_0, t_{n_1}] \rightarrow \mathbf{R}^1$ , a iloczyn skalarny i norma mają odpowiednio postać:

$$(x | y) := \int_{t_0}^{t_n} x(t)y(t)dt, \quad \|x\| := \sqrt{\int_{t_0}^{t_{n_1}} [x(t)]^2 dt} .$$

Zagadnienie doboru optymalnych parametrów zostało rozwiązane za pomocą twierdzenia o rzucie ortogonalnym [1]:

**TWIERDZENIE.** Niech  $H_0$  będzie domkniętą podprzestrzenią liniową przestrzeni Hilberta  $H$ . Wówczas każdemu elementowi  $x \in H$  odpowiada jeden i tylko jeden element  $h_0 \in H_0$ , taki że  $\|x - h_0\| \leq \|x - h\|$  dla wszystkich  $h \in H_0$ . Ponadto  $h_0 \in H_0$  minimalizuje wyrażenie  $\|x - h\|$  wtedy i tylko wtedy, gdy element  $x - h_0$  jest ortogonalny do  $H_0$ .

Element  $h_0$  nazywamy rzutem ortogonalnym elementu  $x$  na podprzestrzeń  $H_0$ .

Wyznaczenie współczynników równań (1 – 3) sprowadza się do rozwiązania układów równań liniowych:

$$\begin{cases}
 R_w^0 \int_{t_0}^{t_n} \hat{i}_w(t) \hat{i}_w(t) dt + L_w^0 \int_{t_0}^{t_n} \hat{i}_w'(t) \hat{i}_w(t) dt = \int_{t_0}^{t_n} \hat{u}_w(t) \hat{i}_w(t) dt \\
 R_w^0 \int_{t_0}^{t_n} \hat{i}_w(t) \hat{i}_w'(t) dt + L_w^0 \int_{t_0}^{t_n} \hat{i}_w'(t) \hat{i}_w'(t) dt = \int_{t_0}^{t_n} \hat{u}_w(t) \hat{i}_w'(t) dt
 \end{cases} ; \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_t^0 \int_{t_0}^{t_n} \hat{i}_t(t) \hat{i}_t'(t) dt + L_t^0 \int_{t_0}^{t_n} \hat{i}_t'(t) \hat{i}_t(t) dt - k_e \int_{t_0}^{t_n} \hat{i}_w(t) \hat{\omega}(t) \hat{i}_t(t) dt = \int_{t_0}^{t_n} \hat{u}_t(t) \hat{i}_t(t) dt \\ R_t^0 \int_{t_0}^{t_n} \hat{i}_t(t) \hat{i}_t'(t) dt + L_t^0 \int_{t_0}^{t_n} \hat{i}_t'(t) \hat{i}_t(t) dt - k_e \int_{t_0}^{t_n} \hat{i}_w(t) \hat{\omega}(t) \hat{i}_t'(t) dt = \int_{t_0}^{t_n} \hat{u}_t(t) \hat{i}_t'(t) dt \\ R_t^0 \int_{t_0}^{t_n} \hat{i}_t(t) \hat{i}_w(t) \hat{\omega}(t) dt + L_t^0 \int_{t_0}^{t_n} \hat{i}_t'(t) \hat{i}_w(t) \hat{\omega}(t) dt - k_e \int_{t_0}^{t_n} \hat{i}_w^2(t) \hat{\omega}^2(t) dt = \\ = \int_{t_0}^{t_n} \hat{u}_t(t) \hat{i}_w(t) \hat{\omega}(t) dt \end{array} \right. ; \quad (8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} J \int_{t_0}^{t_n} \hat{\omega}'(t) \hat{\omega}'(t) dt - k_m \int_{t_0}^{t_n} \hat{i}_t(t) \hat{i}_w(t) \hat{\omega}'(t) dt = \int_{t_0}^{t_n} \hat{M}_0(t) \hat{\omega}'(t) dt \\ J \int_{t_0}^{t_n} \hat{\omega}'(t) \hat{i}_t(t) \hat{i}_w(t) dt - k_m \int_{t_0}^{t_n} (\hat{i}_t(t) \hat{i}_w(t))^2 dt = \int_{t_0}^{t_n} \hat{M}_0(t) \hat{i}_t(t) \hat{i}_w(t) dt \end{array} \right. , \quad (9)$$

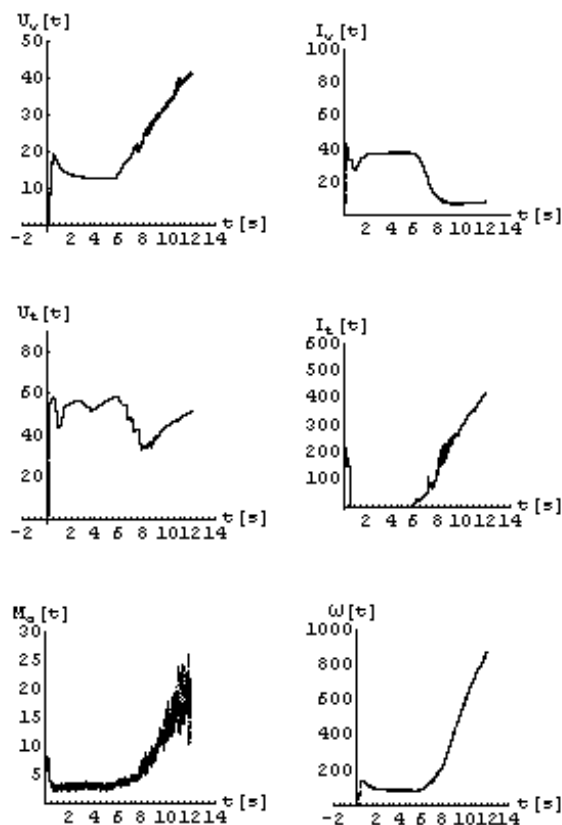
gdzie:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_n} \hat{i}_w(t) \hat{i}_w(t) dt &= \sum_{v=-1}^{N+1} \sum_{\mu=-1}^{N+1} \alpha_v \alpha_\mu d_{v\mu}^{00}, & \int_{t_0}^{t_n} \hat{i}_w'(t) \hat{i}_w'(t) dt &= \sum_{v=-1}^{N+1} \sum_{\mu=-1}^{N+1} \alpha_v \alpha_\mu d_{v\mu}^{01}, \\ \int_{t_0}^{t_n} \hat{i}_w'(t) \hat{i}_w(t) dt &= \sum_{v=-1}^{N+1} \sum_{\mu=-1}^{N+1} \alpha_v \alpha_\mu d_{v\mu}^{11}, \\ \int_{t_0}^{t_n} \hat{u}_w(t) \hat{i}_w(t) dt &= \sum_{v=-1}^{N+1} \sum_{\mu=-1}^{N+1} \alpha_v \beta_\mu d_{v\mu}^{00}, & \int_{t_0}^{t_n} \hat{u}_w(t) \hat{i}_w'(t) dt &= \sum_{v=-1}^{N+1} \sum_{\mu=-1}^{N+1} \alpha_v \beta_\mu d_{v\mu}^{01}, \\ d_{v\mu}^{00} &= \int_{t_0}^{t_N} \Phi_v(t) \Phi_\mu(t) dt, & v, \mu &\in \overline{-1, N+1}; \\ d_{v\mu}^{10} &= \int_{t_0}^{t_N} \Phi_v(t) \Phi_\mu'(t) dt, & v, \mu &\in \overline{-1, N+1}. \end{aligned}$$

Współczynniki  $d_{v\mu}^{00}, d_{v\mu}^{10}$  można wyznaczyć w sposób analityczny. Wtedy powyższe wzory nie zawierają całek oznaczonych. Ma to duże znaczenie w obliczeniach numerycznych. W ten sposób znacznie skraca się czas i zmniejsza błąd obliczeń. Do opracowania algorytmu identyfikacji napisano program komputerowy w języku *Borland Pascal 7.0*.

## PRZYKŁAD NUMERYCZNY

Dla przykładu numerycznego dokonano pomiarów wartości przebiegów  $\tilde{u}_w(t'_k)$ ,  $\tilde{i}_w(t'_k)$ ,  $\tilde{u}_t(t'_k)$ ,  $\tilde{i}_t(t'_k)$ ,  $\tilde{\omega}(t'_k)$ ,  $\tilde{M}(t'_k)$ ,  $k \in \overline{0, n_1}$  obcowzbudnego silnika prądu stałego sterowanego od strony wzbudzenia twornika. Zebrane wartości przedstawiono na rysunku 1.



Rys. 1. Pomiary rzeczywiste przebiegów

Do opisu przebiegów wykorzystano 30 funkcji sklepanych stopnia trzeciego. W wyniku obliczeń otrzymano:

$$R_w^0 = 1.18 [\Omega], \quad L_w^0 = 0.07 [H], \quad R_t^0 = 0.048 [\Omega], \quad L_t^0 = 0.00144 [H],$$

$$k_e^0 = 0.0001 [H], \quad J^0 = 0.48 [kg \cdot m^2], \quad k_m^0 = 0.0048 [s].$$



### BIBLIOGRAFIA

- [1] Kołodziej W., *Wybrane rozdziały analizy matematycznej*, PWN, Warszawa 1970.
- [2] Mańczak K., *Metody identyfikacji wielowymiarowych obiektów sterowania*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1979.
- [3] Rao C. R., *Modele liniowe statystyki matematycznej*, PWN, Warszawa 1982.
- [4] Stieczkin S., Subbotin J., *Splines in mathematica*, Science, Moscow 1976.
- [5] Załęska-Fornal A., Zellma M., *Applications of Basic Splines to Identification of Sailing Object Equations*, „Zeszyty Naukowe” WSM (w druku).
- [6] Zawiałow J., Kwasow B., *Splines methods*, Science, Moscow 1980.

### ABSTRACT

The paper presents possibilities of using base spline functions to identify equations of a DC engine. Third degree base spline functions were used to describe the distributions.

Recenzent kmdr prof. dr hab. Franciszek Grabski